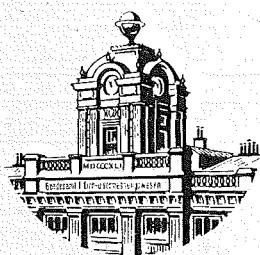


TU

Sonderheft 28  
der Österreichischen Zeitschrift  
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

FESTSCHRIFT

KARL LEDERSTEGER



WIEN 1970

Im Selbstverlag des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen  
Wien, VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3



Sonderheft 28  
der Österreichischen Zeitschrift  
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

## FESTSCHRIFT

KARL LEDERSTEGER  
ZUM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE  
AM 11. NOVEMBER 1970

GEWIDMET VOM  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGWESEN

Im Selbstverlag des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen  
Wien, VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

37.894 T  
Sommer, 28

**Alle Rechte vorbehalten**



**Druck: Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen**



K. Ledurtegi



**o.Prof.Hofrat Dr.phil.,Dr.techn.h.c.,Dr.-Ing.E.h.Karl L e d e r s t e g e r****Lebenslauf und Lebenswerk.**

**A. B a r v i r, Wien**

Geboren am 11. November 1900 in Wien, besuchte K. L e d e r s t e g e r in den Jahren 1911 - 19, unterbrochen durch die Militärdienstleistung i. J. 1918, das Staats-Realgymnasium in Wien XXI und legte daselbst im Sommer 1919 die Reifeprüfung mit Auszeichnung ab. Im Herbst 1919 begann er an der Universität Wien das Studium der Mathematik, Physik, Astronomie und Geodäsie. Daneben hörte er an der Technischen Hochschule Wien die Vorlesungen über Darstellende und Projektive Geometrie und besuchte durch zwei Jahre das Seminar bei Hofrat Emil M ü l l e r. Im Juni 1924 legte er beide Rigoroson aus reiner Philosophie einerseits und aus Astronomie und Theoretische Physik andererseits mit einstimmiger Auszeichnung ab und wurde mit der Dissertation: "Das Sternsystem Ursa maior, eine Spiralbewegung der Milchstrasse", also mit einem Thema der Stellarastronomie, zum Doktor der Philosophie promoviert. Nach zweijähriger, freiwilliger und unbezahlter Dienstleistung an der Universitäts-Sternwarte Wien unter dem Direktorat von Professor Dr.J. H e p p e r g e r erhielt er im Herbst 1926 die Stelle eines a.o. Assistenten an der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie an der Technischen Hochschule Wien unter o.Prof. Hofrat Dr. Richard S c h u m a n n. Während seiner Assistentenzeit hörte er noch Vorlesungen aus Niederer Geodäsie bei Hofrat Dr. E. D o l e z a l und aus Photogrammetrie bei Dozent Dr. D o c k, um sein geodätisches Wissen zu erweitern. Daneben hatte er wiederholt Gelegenheit, bei Schweremessungen, Triangulierungen und Drehwaagenmessungen des Bundesamtes für Eich-und Vermessungswesen mitzuwirken. Damals erhielt er auch einen Lehrauftrag für Sondervorlesungen über Höhere Geodäsie für eine Reihe von Bauingenieuren und

Kursgeometern des Bundesamtes, mit welchen diese für die nachträgliche Ablegung der zweiten Staatsprüfung aus Vermessungswesen vorbereitet werden sollten.

Im Dezember 1931 wurde L e d e r s t e g e r in das genannte Amt versetzt, wo er zuerst einige Jahre in der Triangulierungsabteilung diente und bei den alljährlichen, langmonatigen Feldarbeiten eine reichhaltige Praxis in den Triangulierungsarbeiten sämtlicher Ordnungen erlangte. Daneben führte er schon damals Azimutmessungen auf Punkten 1. Ordnung durch und nahm an den Drehwaagenmessungen im Steinfeld und an der Hohen Wand teil. 1935 wurde er in die Wissenschaftliche Abteilung des Bundesamtes versetzt und hatte dort unter Leitung von Hofrat Dr. H o p f n e r Gelegenheit, mit den engeren Aufgaben der Höheren Geodäsie theoretisch und praktisch Fühlung zu nehmen. Schon 1933 hat er an der Weltlängenbestimmung teilgenommen und konnte sich nun mit allen Zweigen der astronomischen Ortsbestimmung vertraut machen. So hat er die Polhöhen der Universitäts-Sternwarte Wien und den Laplaceschen Punkt Pfänder bei Bregenz erneuert; das letztere Ergebnis stimmte recht gut mit der früheren Bestimmung durch den weltberühmten Astronomen Theodor Ritter von O p p o l z e r überein.

Eine wesentliche Umwälzung seiner amtlichen Tätigkeit brachte das Jahr 1938. Er nahm an den umfangreichen Vermessungen an der tschechischen Grenze teil und leitete die Absteckungsarbeiten für den geplanten 9 km langen Straßentunnel durch die Radstätter Tauern. Ende 1939 wurde er an das Reichsamt für Landesaufnahme in Berlin versetzt, um dort ein Referat für astronomische Ortsbestimmungen und für Schweremessungen einzurichten, die bis dahin ausschließlich zum Aufgabenkreis des Geodätischen Institutes in Potsdam gehörten. Hierbei kamen ihm seine praktischen Erfahrungen zugute. Auch wurde L e d e r s t e g e r zum Mitglied des Forschungsrates für Vermessungswesen und Kartographie ernannt und leitete dort ebenfalls das Schwerreferat. 1941 wurde er zum Oberregierungsrat befördert. Behufs Mitwirkung an der von der Heeresvermessung beabsichtigten Triangulierung 1.O. in Frankreich mußte er aber bald darauf zur Militärdienstleistung einrücken.

Er beobachtete 1942 zehn Punkte 1.O. in der Bretagne im Parallel von Paris und fast die ganze Dreieckskette von Dinant bis St. Nazaire. Ferner beobachtete er mehrere Azimute und vor allem den Laplaceschen Punkt Tousaines in der Nähe des Kriegshafens Brest. Im Winter 1942/43 wurde er als Wachtmeister an das Oberkommando des Heeres in Berlin kommandiert und mit den grundlegenden Aufgaben für den geodätischen Zusammenschluß der Balkanländer und Ungarns betraut, welche Arbeiten in einer Reihe von Abhandlungen niedergelegt erscheinen, die teils in den "Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten und Vermessungswesen" veröffentlicht wurden, teils nicht mehr vor Kriegsende gedruckt werden konnten. Weil das Schwerpunkt dieser Arbeiten in Jugoslawien lag, wurde L e d e r s t e g e r 1944 nach Belgrad und später nach Kragujevac versetzt, wo er die Grundlagen für die fachliche Arbeit einer Vermessungsbatterie zu bearbeiten hatte. Bei Kriegsende war L e d e r s t e g e r am Kriegsvermessungsamt Prag tätig und geriet bei Pilsen in amerikanische Gefangenschaft, aus der er nach sieben Wochen nach Oberösterreich entlassen wurde.

Bereits 1943 wurde unserem Jubilar fast gleichzeitig von der Technischen Hochschule Darmstadt und von der Technischen Hochschule Wien eine Professur angeboten. Er entschied sich für seine Heimatstadt Wien und wurde mit 1. März 1944 als Nachfolger B e r r o t h s zum Ordinarius am Institut für Höhere Geodäsie ernannt, konnte den Posten aber nicht antreten, weil ihn der Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens als unentbehrlich nicht freistellte. Als L e d e r s t e g e r dann Ende 1945 nach Wien zurückkam, war inzwischen sein Vorgänger Hofrat H o p f n e r rehabilitiert worden, weshalb er schließlich 1947 wieder in das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen eingestellt wurde, wo er mit Sonderaufgaben betraut war. Nach dem tragischen Tode Prof. H o p f n e r s im Herbst 1949 wurde er bald mit der Supplierung der Fächer Astronomie und Kartenentwurfslehre beauftragt. Mit 1.1.1952 wurde er zum Oberrat des Vermessungsdienstes ernannt und noch im gleichen Monat erhielt er die venia legendi für das Fach "Höhere Geodäsie und Astronomie sowie die angrenzenden Teilgebiete der Geophysik".

Im März 1952 wurde er zum Mitglied der II. Staatsprüfungskommission für Vermessungswesen ernannt. Im November 1953 wurde er überdies zum Mitglied der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung gewählt. Mit 1. Jänner 1956 erfolgte seine Bestellung zum Leiter der Abteilung Erdmessung des Bundesamtes. Da er anfangs 1957 bereits in Verhandlungen wegen einer Neuberufung an die Technische Hochschule Wien stand, verzichtete er freiwillig auf seine Beförderung zum wirklichen Hofrat und der Herr Bundespräsident verlieh ihm Ende Juni 1957 diesen Titel. Schließlich erfolgte am 19.9.1957 seine Ernennung zum o. Hochschulprofessor und zum Vorstand des Institutes für Höhere Geodäsie.

Seine Wahl zum Präsidenten der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung mit 1.1.1961 war der Auftakt zu einer Reihe in- und ausländischer Ehrungen. Durch zwei Perioden war er Sekretär der Sektion Geoid der Internationalen Assoziation für Geodäsie, welches Amt er 1963 freiwillig zurücklegte, um sich ganz seiner Forschung widmen zu können. Bereits bei ihrer Gründung 1950 wurde er zum korr. Mitglied der Deutschen Geodätischen Kommission gewählt. Er ist Mitglied der Geophysikalischen Kommission bei der Akademie der Wissenschaften sowie Mitglied der Astronomischen Kommission und der Kommission für Weltraumforschung daselbst. Er war wiederholt Mitglied verschiedener Studienkommissionen der IAG und ist auch österr. Delegierter in der Internationalen Kommission für die Satellitentriangulierung. Ferner wurden ihm folgende weitere Ehrungen zuteil:

- a) am 7. Mai 1960 wurde er an der TH Graz zum Ehrendoktor der technischen Wissenschaften promoviert;
- b) am 17. Februar 1961 wurde er zum korr. Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften gewählt;
- c) am 30. Mai 1961 erfolgte seine Wahl zum korrespondierenden und am 22. Mai 1962 seine Wahl zum wirklichen Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften;
- d) am 3. Mai 1967 wurde er zum Ehrenmitglied der Ungarischen Akademie

der Wissenschaften gewählt;

e) am 14. April 1970 wurde er mit dem Technikpreis der Wiener Wirtschaft ausgezeichnet und schließlich

f) erfolgte am 4. November 1970 an der Technischen Universität Dresden seine Promotion zum Dr.-Ing. ehrenhalber.

Sichtbarer Beweis seiner wissenschaftlichen Geltung und internationalen Anerkennung sind auch die zahlreichen Einladungen zu Auslandsvorträgen, deren Zahl bereits 150 überschritten hat, sowie wiederholte Gastprofessuren (München, Moskau, Dresden und Braunschweig) und zahlreiche Inlandsvorträge und Vorträge auf internationalen Fachtagungen.

Als junger Astronom widmete sich L e d e r s t e g e r vorwiegend Problemen der Stellarastronomie und der Himmelsmechanik. Angeregt durch seinen Chef Hofrat S c h u m a n n wandte sich der Assistent dem Problem der Polhöhen Schwankung zu, auf welchem Gebiet er rund 10 Jahre erfolgreich arbeitete. Er ersann nicht nur eine neue Methode zur Berechnung der Polbahn, sondern studierte auch eingehend die Wittingschen Störungen und fand eine 37-jährige Schwebungsperiode, die entgegen theoretischen Überlegungen auf einen Mondeinfluß hinzudeuten schien. Jedenfalls konnte er aus dem Material des Internationalen Breitendienstes 1900-1935 nicht nur den Phasensprung im Jahre 1928, sondern auch die Maximalamplitude 1946 "voraussagen". Seine militärischen Aufgaben, im wesentlichen Zusammenschlüsse von getrennten Landestriangulationen ohne Verbindungstriangulierungen, konnte er nun mittels eines eigenen Verfahrens lösen, das er astronomischen Netz zusammenschluß nannte. Dadurch angeregt, vertiefte er sich in die Probleme der Astronomischen Geodäsie und konnte auf Grund der klaren Unterscheidung zwischen der translativen und projektiven Methode den mehrjährigen Streit zwischen B a e s c h l i n , V e n i n g - M e i n e s z und H o t i n e schlichten. Neue Begriffe, wie die geodätische Fehlerfreiheit eines Dreiecksnetzes und das naturtreue Netz, das als Projektion der Geoidpunkte auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid definiert ist, trugen viel zur

Klärung der einschlägigen Fragen bei. Eine scharfe Analyse der Laplaceschen Widersprüche ermöglichte auch die Berechnung der Azimutreduktion vom geoidischen auf den ellipsoidischen Zielpunkt. Erstmals konnte L e d e r s t e g e r auch den auf einer willkürlichen Wahl der Lotabweichung im Fundamentalpunkt beruhenden Abstand der parallelen Achsen von Geoid und Referenzellipsoid berechnen. Den beiden klassischen Methoden zur Berechnung bestanschließender Ellipsoide, der Gradmessungs- und der Flächenmethode, schloß er ein eigenes Verfahren an, die Methode der Partialsysteme, welche auf dem von ihm gefundenen Satz von der Invarianz des Schwerpunkts eines Lotabweichungssystems gegenüber jedem beliebigen Ellipsoidübergang beruht, sobald auf dem ersten Ellipsoid das Minimalsystem vorliegt. Ein kontinentales Netz wird nach Grädfeldern zerlegt, deren jedes für sich in die Minimallage gebracht wird. Es entstehen an den Rändern Klaffungen und Überdeckungen, die durch einen Ellipsoidübergang zu einem Minimum gemacht werden.

1948 führte L e d e r s t e g e r auf Grund seines reichhaltigen, während des Krieges gesammelten Materials als erster einen genäherten Zusammenschluß der europäischen Triangulierungen durch und berechnete das bestanschließende Ellipsoid für Europa, welches Ergebnis später durch die Einbeziehung des Ostseeringes verbessert werden konnte. Er war auch der erste, der den Hauptmangel des 1951 vorliegenden Europanetzes scharf kritisierte : die geodätischen Ausgangsdaten im Fundamentalpunkt Potsdam sind in Breite um  $3,0''$  und in Länge um  $1,2''$  zu groß. Auf der Idee der Partialsysteme beruht auch die absolute oder astronomisch-gravimetrische Lotabweichungsausgleichung, die eine Verbesserung der Achse des Normalsphäroides liefert, wenn die Abplattung bekannt ist. Es müssen also merkwürdigerweise die Undulationen des Geoides gegenüber dem Normalsphäroid bekannt sein, ehe dessen Achse exakt bestimmt werden kann. Diese Methode liefert überdies die absolute Lage der Landesfundamentalpunkte und damit auch die Verbindung der Kontinente über die Weltmeere hinweg mit einer sehr befriedigenden Genauigkeit.

Ledersteger entwickelte auch neue Formeln zur trigonometrischen Höhenmessung und zeigte an Hand ihrer geodischen und ellipsoidischen Auswertung, daß bei gegenseitigen Zenitdistanzen für die Berechnung der Höhenunterschiede die Refraktions- und die Krümmungskorrektion unterdrückt werden darf. Der Zusammenhang zwischen Meereshöhen und trigonometrischen Höhen konnte weiter geklärt und die zusätzliche Geoidkrümmung abgeleitet werden. Besondere Beachtung wurde der Kreisbogenbedingung zugewendet. Auch die Theorie des geometrischen Nivellements konnte nicht unwe sentlich erweitert werden. Die Einführung des Begriffes der "Vertikalen Dynamischen Korrekturen" ermöglichte eine streng einheitliche Behandlung des Problemes der Schwerereduktion der Nivellements, wobei sich auch das neue Stufenmodell für die Geländereduktion als recht brauchbar erwies. Hinsichtlich der Frage der sogenannten Gebrauchshöhen ist eine eindeutige, allgemein gültige Definition des Minimalsystems der metrischen Korrekturen nicht möglich; doch konnte Ledersteger ein recht gutes Näherungsverfahren angeben.

Ganz besonders störten ihn die bekannten Mängel der bisherigen lokalen, vertikalen Isostasie. Ausgehend von einer neuen, wirklich exakten Definition der Topographie entwickelte er die "horizontale" Isostasie, welche erstmals die gleichzeitige Erhaltung von Masse und Druck garantiert. Als freie Parameter des Problems treten die Krustendichte, der Dichtesprung an der Moho fläche und deren Tiefe auf. Eine voll befriedigende Übereinstimmung mit den geophysikalischen Daten konnte allerdings bisher noch nicht erzielt werden, doch hofft Ledersteger, in diesen Fragenkomplex mittels eines Vergleiches des isostatischen Geoides mit dem Satellitengeoid und mit den Berechnungen des Geoides auf Grund des klassischen Stokesschen Integrales tiefer eindringen zu können.

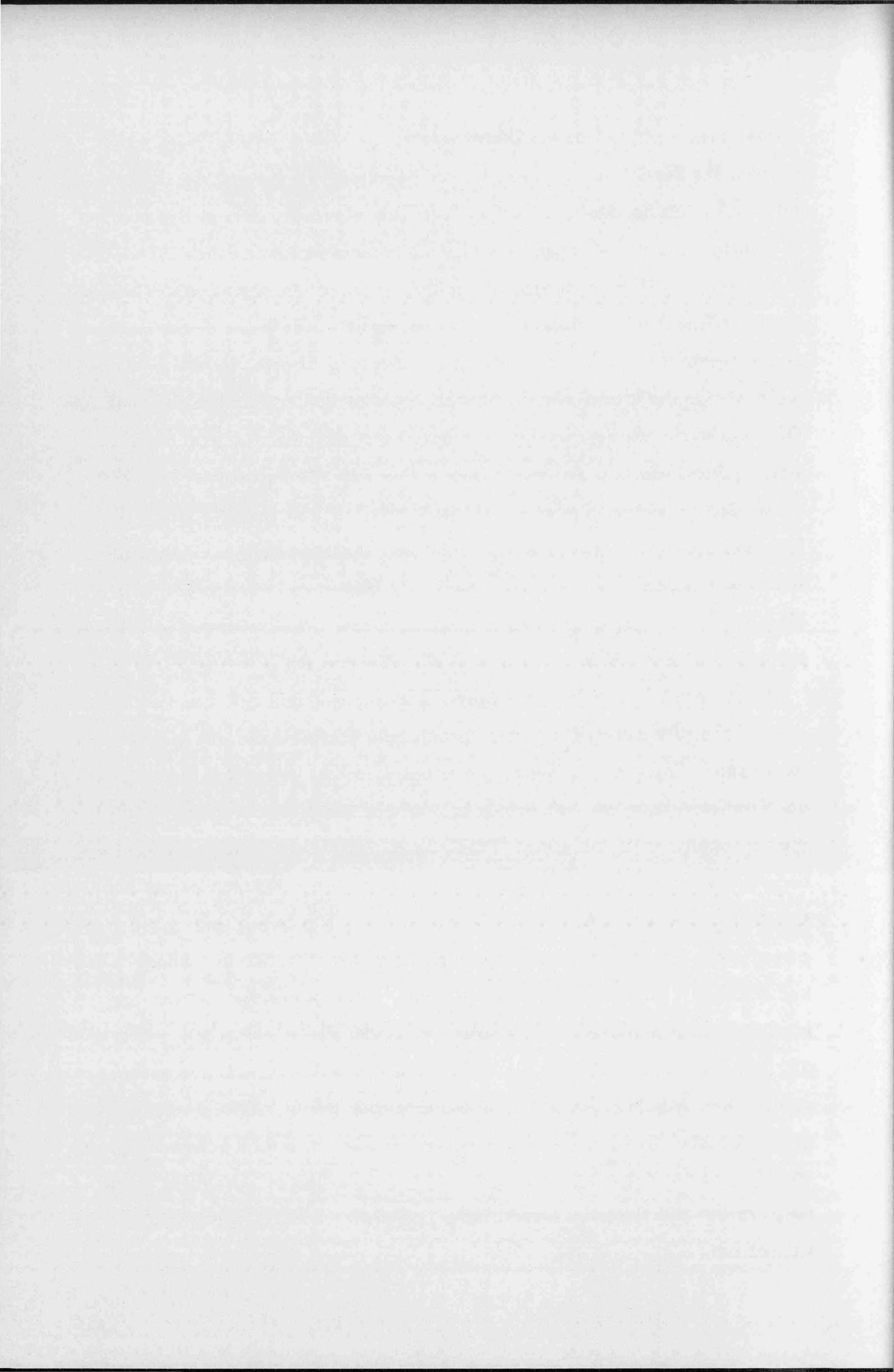
Auf Grund des Konzeptes einer streng physikalischen Methode zur Lösung des gesamten Problems der Erdfigur gelangte Ledersteger zur Definition und Berechnung der Normalfigur der Erde. Er versteht darunter eine "Gleichgewichtsanordnung" der Erdmasse, welche für eine etwas größere

Rotationsgeschwindigkeit eine Figur des relativen, hydrostatischen Gleichgewichts wäre. Diese Annahme beruht auf dem genauen Studium des Wechselspiels von Kontraktion und Flutreibung und steht in einer gewissen Analogie zum Mondproblem von Laplace, das er in Näherung 2.O. vollständig gelöst hat. Eine Ausdehnung auf die Glieder 4.O. ist geplant, wie auch eine vertiefte Kritik der bisher aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten abgeleiteten Massefunktionen der Erde. So will unser Jubilar nicht nur das Selenoid in Näherung 4.O. untersuchen, sondern auch die schwierigen Fragen des Zusammenhangs zwischen Gestalt und innerem Aufbau der Erde einer weiteren Klärung zuführen; er will, um es mit seinen eigenen Worten zu sagen, die Physikalische Geodäsie zur grundlegenden Disziplin der Geophysik machen.

In engstem Zusammenhang mit diesen Problemen steht das jahrelange Studium der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren, mit dem L e d e r s t e g e r der herrschenden, mehr geometrischen Richtung eine streng physikalische Richtung der Höheren Geodäsie gegenüberstellen will. Dies kommt auch im Problem des Referenzkörpers, d.h. in seiner Ablehnung des fiktiven Niveau-ellipsoides zum Ausdruck, dessen Gültigkeitsbereich und möglichen Massenanordnungen er eingehend untersucht hat. An Stelle des Niveauellipsoides hätte das Normalsphäroid oder das mit diesem volum- und abplattungsgleiche mittlere Erdellipsoid zu treten. Tatsächlich konnte L e d e r s t e g e r zeigen, daß ein Niveauellipsoid für die Rotationsgeschwindigkeit der Erde in aller Strenge überhaupt unmöglich ist und untersuchte im Sinne der Theorie Somoglianás die möglichen Massenanordnungen für das exakte und genäherte Niveauellipsoid in Funktion der Rotationsgeschwindigkeit. Das allgemeine Niveausphäroid, das er selbst bis einschließlich der Glieder 8.O. entwickelt hat, wird in Näherung 4.O. in einem eigenen Diagramm dargestellt, das sich besonders gut zur Abgrenzung des Bereiches der möglichen Gleichgewichtsfiguren eignet. Er nimmt den Ausgang von den sogenannten Wiechert-Modellen, bestehend aus homogenem Mantel und homogenem Kern, die sich

wegen ihres exakt bekannten Dichtegesetzes besonders gut als Grundmodell eignen. Ihr Bereich ist von zwei Kurven begrenzt, der Parabel der äußeren Niveauflächen der MacLaurinschen Ellipsoide einerseits und der Hyperbel  $a_k = \min$ , d.h. der Wiechert-Modelle mit minimalen Kernradius andererseits, welche mit hoher Wahrscheinlichkeit auch die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren mit stetigem Dichtegesetz enthält. Die Frage dieses stetigen Dichtegesetzes ist noch nicht definitiv gelöst; doch konnte L e d e r s t e - g e r einige der klassischen Ansätze ad absurdum führen. Zahlreiche, mit dem Gleichgewicht zusammenhängende Fragen konnten ganz oder zumindest teilweise geklärt werden. Jedenfalls aber erwies sich die Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren als ein wertvolles Hilfsmittel zur Klärung des Problems des inneren Aufbaues des Erdkörpers und verspricht in dieser Hinsicht noch manche wertvolle Erkenntnis. Ein besonders interessantes, allerdings noch nicht exakt bewiesenes Ergebnis dieser Untersuchungen ist die Hypothese, daß der Radius des Erdkernes ein Minimum ist.

Mit seiner, oft recht eigenwilligen Forschungsmethode hat L e d e r s t e - g e r schon frühzeitig die Aufmerksamkeit der Fachwelt auf sich gelenkt. Auch wenn diesem regen Geist, wie es bei dieser Fülle der sich aufdrängenden Probleme kaum anders denkbar ist, manche Umwege und Irrwege nicht erspart blieben, so ist er, wie er lächelnd sagt, stolz darauf, daß er all seine begangenen Fehler mit einer einzigen Ausnahme stets selbst korrigieren konnte, ehe sie von einem Kollegen entdeckt wurden. Das Lebenswerk L e d e r - s t e g e r s ist in 129 Zeitschriftenartikeln und in 17 größeren Abhandlungen und Büchern – in erster Linie in Band V des "Handbuches der Vermessungskunde" (Astronomische und Physikalische Geodäsie) – niedergelegt, wozu noch 19, zum Teil umfangreiche militärische Arbeiten und Kongreßvorlagen neben zahlreichen Würdigungen und Buchbesprechungen treten. Ein Verzeichnis dieser Arbeiten ist in dem von seinem Freunde Max K n e i ß l herausgegebenen Heft 13 der Reihe E (Geschichte und Entwicklung der Geodäsie) enthalten, das ihm die Deutsche Geodätische Kommission zum 70. Geburtstag gewidmet hat.



Eine verallgemeinerte Lösung für das astronomisch-gravimetrische Nivellement

K. ARNOLD, Potsdam

Beim astronomischen Nivellement erhält man durch Integration der Differentialgleichung

$$d\xi = -\varepsilon \, ds$$

entlang bestimmter Profile auf der Erdoberfläche die Unterschiede der Geoidhöhen  $\xi$ .  $ds$  ist das Linienelement entlang diesem Profil,  $\varepsilon$  ist die Komponente der Lotabweichung in diesem Profil. Die Integration ergibt

$$\xi_B - \xi_A = - \int_A^B \varepsilon \, ds$$

mit

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \gamma \sin \alpha,$$

wobei  $\xi$  und  $\gamma$  die Komponenten der Lotabweichung im Meridian und im ersten Vertikal sind.  $\alpha$  ist das Azimut des Profils. § 7.

$\xi$  und  $\gamma$  werden in den Lotabweichungspunkten durch astronomische Beobachtungen bestimmt.

Beim astronomisch -gravimetrischen Nivellement werden die  $\xi, \gamma$ -Werte zwischen den Lotabweichungspunkten gravimetrisch interpoliert § 7. Daher werden gravimetrische Lotabweichungen nach dem Integral von VENING-MEINESZ entlang dem Profil zwischen zwei benachbarten Lotabweichungsstationen eingeführt. Die Systemunterschiede zwischen den astronomischen Lotabweichungen und

den gravimetrischen Lotabweichungen werden zwischen zwei Lotabweichungsstationen als linear veränderlich betrachtet und aus der Diskrepanz der Unterschiede der astronomischen und gravimetrischen Lotabweichungen zwischen benachbarten Lotabweichungsstationen bestimmt.

Man hat dann, wenn die Punkte A und B Lotabweichungsstationen bezeichnen  $\underline{1} \underline{7}$ ,

$$\xi_B - \xi_A = -\frac{1}{2}s(\varepsilon_{a.A} + \varepsilon_{a.B}) + \Delta \bar{\xi},$$

$$\Delta \bar{\xi} = N_B - N_A + \frac{1}{2}s(\varepsilon_{g.A} + \varepsilon_{g.B}) + KG(\Delta \bar{\xi}).$$

s ist die Länge des Profils zwischen den beiden Lotabweichungsstationen A und B,  $\varepsilon_{a.A}$  bzw.  $\varepsilon_{a.B}$  sind die astronomischen,  $\varepsilon_{g.A}$  bzw.  $\varepsilon_{g.B}$  sind die gravimetrischen Lotabweichungen in diesen beiden Punkten.  $\Delta \bar{\xi}$  ist die gravimetrische Verbesserung.  $N_A$  bzw.  $N_B$  sind die gravimetrisch aus der STOKESschen Formel erhaltenen Geoidundulationen. KG( $\Delta \bar{\xi}$ ) ist die Korrektion des Wertes  $\Delta \bar{\xi}$  entsprechend der neuen Theorie der physikalischen Geodäsie.

Für die Berechnung von  $\Delta \bar{\xi}$  aus den Schwereanomalien sind Schablonen  $\underline{1} \underline{7}$ ,  $\underline{5} \underline{7}$ ,  $\underline{6} \underline{7}$  entwickelt worden.

Sind die  $\xi$ -Werte für ein großes Gebiet zu berechnen, so ist es nachteilig, daß man auf dem genannten Wege nur schrittweise von einer Lotabweichungsstation zur anderen vorgehen kann, daß man zwischen diesen Stationen keine  $\xi$ -Werte erhält und daß von Schritt zu Schritt die Systemunterschiede zwischen den beiden Lotabweichungssystemen neu und unabhängig bestimmt werden, während es bekannt ist, daß sie sich nur sehr wenig mit der geographischen Länge und Breite ändern und damit für benachbarte Schritte stark korreliert sind.

Für die Transformation der gravimetrischen Größen  $N, \varepsilon_g = \xi_g \cos \alpha + \eta_g \sin \alpha$  in das System der astronomischen Größen  $\zeta, \varepsilon_a = \xi_a \cos \alpha + \eta_a \sin \alpha$  gilt 27

$$\begin{aligned} dN_g &= \cos \varphi \cos \lambda \cdot dt_x + \cos \varphi \sin \lambda \cdot dt_y + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot dt_z - dR_E + \sin^2 \varphi \cdot d\varepsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} d\xi_g &= \frac{1}{R_E} \left\{ \sin \varphi \cos \lambda \cdot dt_x + \sin \varphi \sin \lambda \cdot dt_y - \right. \\ &\quad \left. - \cos \varphi \cdot dt_z - \sin 2\varphi \cdot d\varepsilon \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$d\eta_g = \frac{1}{R_E \cos \varphi} \left\{ \sin \lambda \cdot dt_x - \cos \lambda \cdot dt_y \right\}. \quad (3)$$

$dt_x, dt_y, dt_z$  sind orthogonale Translationskomponenten,  
 $dR_E$  ist die Änderung der großen Halbachse,  
 $d\varepsilon = \frac{1}{2} R_E d(e'^2)$  entspricht einer Änderung der Abplattung des Erdellipsoide.

Man kann hier auch die Transformationsformeln von VENING-MEINESZ einführen 37, 57.

$$\begin{aligned} dN_g &= R_E \left[ -(\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos 4\lambda) d\xi_0 - \right. \\ &\quad - \cos \varphi \sin 4\lambda \cdot d\eta_0 + (\sin \varphi_0 \sin \varphi + \\ &\quad + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos 4\lambda) \left( \frac{dN_0}{R_E} + \frac{dR_E}{R_E} + \sin^2 \varphi_0 df \right) - \\ &\quad \left. - \frac{dR_E}{R_E} + (\sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi_0 \sin \varphi) df \right], \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\xi_g = & (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos \Delta\lambda) d\xi_0 - \\
 & - \sin \varphi \sin \Delta\lambda \cdot d\eta_0 - (\sin \varphi_0 \cos \varphi - \\
 & - \cos \varphi_0 \sin \varphi \cos \Delta\lambda) \left( \frac{dN_0}{R_E} + \frac{dR_E}{R_E} + \sin^2 \varphi_0 \cdot df \right) - \\
 & - 2 \cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0) df,
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 d\eta_g = & \sin \varphi_0 \sin \Delta\lambda \cdot d\xi_0 + \cos \Delta\lambda \cdot d\eta_0 + \\
 & + \cos \varphi_0 \sin \Delta\lambda \left( \frac{dN_0}{R_E} + \frac{dR_E}{R_E} + \sin^2 \varphi_0 \cdot df \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

$\varphi_0, \lambda_0, d\xi_0, d\eta_0, dN_0$  beziehen sich auf einen bestimmten beliebig zu wählenden Bezugspunkt.

Für die Bestimmung der Geoidhöhen aus astronomischen und isostatischen Lotabweichungen wurde auch ein Weg angegeben, bei dem statistische Methoden eingeführt wurden. Dort können die isostatischen Lotabweichungen auch durch gravimetrische ersetzt werden 47.

Es soll nun ein Verfahren entwickelt werden, das für die Bearbeitung größerer Gebiete geeignet ist, bei dem zahlreiche Lotabweichungsstationen eingeführt werden, bei dem für das ganze Gebiet einheitliche Systemunterschiede eingeführt werden, bei dem die Beobachtungen, also die Lotabweichungskomponenten und die Schwereanomalien als zufällige Variable eingeführt werden, bei dem eine Ausgleichung aller Beobachtungen in einem Guß erfolgt und bei dem die elektronische Datenverarbeitung voll eingesetzt werden kann. Man erhält als Ergebnis Geoidhöhen für das gesamte zu bearbeitende Gebiet.

Zwischen den astronomischen Lotabweichungskomponenten  $\xi_{a.i}$  bzw.  $\eta_{a.i}$  mit den zufälligen Verbesserungen  $v_{1.i}$  bzw.  $v_{2.i}$  und den Schwereanomalien  $ag_i$  mit den zu-

fälligen Variablen  $v_{3.i}$  gilt die Beziehung

$$\xi_{a.i} + v_{1.i} - \frac{1}{4\pi G} \sum_k \{ \Delta g_k + v_{3.k} \} \left\{ \cos \alpha \frac{dS_T}{d\psi} \right\}_{i.k} \Delta F_k - \\ - d\xi_{g.i} = 0, \quad (7)$$

$$\eta_{a.i} + v_{2.i} - \frac{1}{4\pi G} \sum_k \{ \Delta g_k + v_{3.k} \} \left\{ \sin \alpha \frac{dS_T}{d\psi} \right\}_{i.k} \Delta F_k - \\ - d\eta_{g.i} = 0. \quad (8)$$

$\Delta F_k$  ist das Flächenelement, auf das sich bei der Summierung die Schwereanomalien  $\Delta g_k$  beziehen. Die Werte  $d\xi_{g.i}$ ,  $d\eta_{g.i}$  ergeben sich mit den Formeln (2), (3), (5), (6). Sie enthalten die Unbekannten des Problems  $dt_x$ ,  $dt_y$ ,  $dt_z$ ,  $d\varepsilon$  bzw.  $d\xi_0$ ,  $d\eta_0$ ,  $dN_0 + dR_E$ ,  $df$ . Das sind die Parameter der Systemunterschiede.

Die Gleichungen (7) und (8) haben den Charakter von Bedingungsgleichungen mit Unbekannten im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate. Die Größen  $v_{1.i}$ ,  $v_{2.i}$ ,  $v_{3.i}$  sind die zufälligen Variablen. Die vier Parameter der Systemunterschiede sind die Unbekannten. Die zufälligen Variablen und die vier Parameter liegen nach der Ausgleichung als bekannte Größen vor.

Im Anschluß an diese Ausgleichung ist man in der Lage, die Geoidhöhe  $\xi$  nach folgender Formel zu bestimmen:

$$\xi_i = \frac{R_E}{4\pi G} \sum_k \{ \Delta g_k + v_{3.k} \} \{ S_T(\psi) \}_{i.k} \Delta F_k + \\ + dN_{g.i} + \text{konst.} \quad (9)$$

$dN_g$  bestimmt sich nach (1) bzw. (4) aus den vier Parametern der Systemunterschiede. Die  $\xi_i$ -Werte lassen sich wie bei allen Verfahren des astronomischen Nivellements nur bis auf eine Konstante bestimmen.

Man erhält als Ergebnis Geoidhöhen, die verträglich sind mit den astronomisch bestimmten Lotabweichungen. Bei der Berechnung der  $\xi$ -Werte wurden die Daten des Schwerefeldes voll ausgenutzt, so daß die Möglichkeit der "gravimetrischen Interpolation" der Lotabweichungen zwischen den Lotabweichungen voll genutzt wurde.

Bei der Berechnung der Gleichungen (7), (8), (9) können die Möglichkeiten der elektronischen Datenverarbeitung voll ausgenutzt werden. Schwereanomalien, die mit großem Gewicht in die Gleichungen (7), (8) (9) eingehen, wird man in bezug auf relativ kleine Flächenelemente  $\Delta F_k$  einführen. Den Verbesserungen  $v_{3,i}$  von solchen Schwereanomalien  $\Delta g_i$ , die relativ genau bekannt sind, wird man ein angemessen hohes Gewicht geben. Analog kann man mit den Verbesserungen  $v_{1,i}$  und  $v_{2,i}$  der Lotabweichungskomponenten  $\xi_{a,i}$  und  $\eta_{a,i}$  verfahren. Die Methode ist also flexibel.

Den Bereich, der von den Flächenelementen  $\Delta F_k$  in den Gleichungen (7), (8), (9) überdeckt wird, kann man letzten Endes beliebig groß wählen, er kann die ganze Erde überdecken. Aus praktischen Erwägungen heraus wird man die Größe dieses Bereiches  $B_1$  in Abhängigkeit von der Größe jenes Bereiches  $B_2$  wählen, der von den Lotabweichungsstationen überdeckt wird. Vielleicht wird es genügen, die Grenzen des Bereichs  $B_1$  etwa 1000 km außerhalb des Bereichs  $B_2$  verlaufend zu wählen. Flächenelemente  $\Delta F_k$ , die relativ weit vom Bereich  $B_2$  entfernt sind, kann man relativ groß wählen. Die Geoidhöhen  $\xi_i$  wird man nur für den Bereich  $B_2$  mit angemessener Genauigkeit berechnen können.

Ist ein besonders großes Gebiet  $B_2$  zu bearbeiten, in dem sehr viele Lotabweichungsstationen liegen, dann wird bei der Ausgleichung das Normalgleichungssystem sehr groß sein. Sollte das System zu groß sein, um es auf der betreffenden elektronischen Rechenmaschine lösen zu können, so wird man das Normalgleichungssystem in Teilsysteme zerlegen können, aus denen sich das gesamte Normalgleichungssystem approximativ ähnlich wie eine Diagonalmatrix zusammensetzen läßt. Die einzelnen Teilsysteme lassen sich partiell reduzieren, und die Restsysteme lassen sich nach dem Additionssatz der reduzierten Normalgleichungssysteme zum System der Hauptausgleichung zusammensetzen. Anschließend kann man rückläufig die einzelnen Teilsysteme und ihre Korrelationen vollständig berechnen.

### Literatur

- 1\_7 ARNOLD, K.: Ein graphisches Hilfsmittel zur gravimetrischen Verbesserung astronomischer Nivellements.  
Veröff. Nr. 18 d. Geod. Inst. Potsdam bei der Deutschen Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1961
- 2\_7 ARNOLD, K.: Das Minimumsprinzip für die Geoidundulationen bei der Bearbeitung astronomisch-geodätischer Netze.  
Veröff. Nr. 8 d. Geod. Inst. Potsdam bei der Deutschen Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1955
- 3\_7 HEISKANEN, A., und MORITZ, H.: Physical Geodesy.  
W. H. Freeman, San Francisco, 1967
- 4\_7 HEITZ, S.: Geoidbestimmung durch Interpolation nach kleinsten Quadraten aufgrund gemessener und interpolierter Lotabweichungen.  
DGK, Reihe C, Heft 124
- 5\_7 LEDERSTEGER, K.: Astronomische und physikalische Geodäsie.  
Bd. V. Handbuch der Vermessungskunde von Jordan/Eggert/Kneissl
- 6\_7 MOLODENSKII, M. S., EREMEEV, V. F., YURKINA, M.I.: Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth.  
Veröff. Nr. 131, ZNIIGAIK Moskau 1960. Übers. aus d. Russ. Jerusalem 1962

LINEAR PREDICTION AND FILTERING.

Arne Bjerhammar, Royal Institute of Technology, Stockholm

Summary.

The classical prediction technique according to Wiener-Hopf has earlier been successfully explored by various geodesists as Kaula, Moritz and Wolf. The main limitation of this procedure is that the auto-covariance matrix of the observations has to be inverted. Furthermore, the method cannot be used for singular auto-covariance matrices. The following study presents a new linear prediction method that will reduce the computational work in a very drastic way. (The computation can be more than 100 times less for a system with 1000 observations.) The new method is applicable to singular as well as non-singular auto-covariance matrices. Furthermore, the method also incorporates a type of filtering. First we shall make a short presentation of the classical approach and include a generalization to singular auto-covariance matrices.

We denote the true value to be predicted by the variable  $\xi$  and the corresponding prediction  $X$ . A set of observations  $l_1, l_2 \dots l_n$  is available for the determination of the prediction.

It is anticipated that the predicted value  $X$  can be obtained from a linear combination of the observations which we present by the matrix equation

$$\begin{matrix} X & = & A & L \\ 11 & & 1n & nl \end{matrix} \quad (1)$$

where

$A$  = unknown matrix (to be determined)

$L$  = set of observations ( $n$  elements)

In a pure prediction we consider the observation free from errors.

For the ideal prediction we have

$$X = \xi \quad (2)$$

In the actual case the prediction will include an error  $\epsilon$

$$\epsilon_{11} = X_{11} - \xi_{11} = A L_{11} - \xi_{11} \quad (3)$$

After squaring we obtain

$$\epsilon \epsilon = \xi \xi + A L L' A' - 2 A L \xi \quad (4)$$

From this expression we obtain the expectation

$$E \{ \epsilon \epsilon \} = E \{ \xi \xi \} + E \{ A L L' A' \} - 2 E \{ A L \xi \} \quad (5)$$

or

$$E \{ \epsilon \epsilon \} = q_{\xi \xi} + A Q_{11} A' - 2 A q_{1 \xi} = (\sigma^2) \quad (6)$$

Here we have

$$E \{ \xi \xi \} = q_{\xi \xi} \quad \text{auto-covariance of the true value to be predicted}$$

$$E \{ L L \} = Q_{11} \quad \text{auto-covariance of the observation}$$

$$E \{ L \xi \} = q_{1 \xi} \quad \text{cross-variance of the observations and the true value to be predicted}$$

$$E \{ \epsilon \epsilon \} = \sigma^2 \quad \text{variance of the prediction error}$$

We now want to find the solution with the smallest variance of the prediction error.

After differentiation we obtain for a maximum (or minimum)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial A} = Q_{11} A' - q_{1\xi} = 0 \quad (7)$$

Then we have

$$A = q_{1\xi}' Q_{11}^{-1} \quad (8)$$

It can be proved that this solution gives a minimum of the prediction error variance when the observations are considered free from errors and the covariance matrix  $Q$  is non-singular. We now have the final prediction

$$X = q_{1n}' Q_{nn}^{-1} L_{nl} \quad (9)$$

This solution for the linear prediction problem is in accordance with the Wiener-Hopf approach. For further details cf. Kaula, Moritz and Wolf.

There are some practical difficulties when using this equation. The inversion of the covariance matrix  $Q$  will be extremely tedious for large systems with many observations. Furthermore, we have to note that in many cases the computed covariance matrix  $Q$  will be singular. Then the inversion will be impossible according to classical methods. A solution can still be contemplated if we introduce the generalized inverse  $Q^{-1}$  defined by the equation

$$Q Q^{-1} Q = Q \quad \text{Bjerhammar 1951, 1955} \quad (10)$$

With this definition of the inverse we have a large set of solutions that all can be considered.

For the further analysis we introduce the parameter

$$Y = Q^{-1} L \quad (11)$$

A subset of solutions is now obtained from equation (10) and (11) if we make use of

$$Q^{-1} = (Q'Q)^{-1} Q' \quad (12)$$

Then equation (11) gives the set of solutions that minimizes the variance

$$(Q \bar{Y} - L)' (Q \bar{Y} - L) \quad (13)$$

A unique answer is obtained for the inverse (cf. Bjerhammar 1955, 1958)

$$Q^{-1} = Q' (QQ')^{-1} Q (Q'Q)^{-1} Q' \quad (14)$$

This solution also minimizes

$$Y'Y \quad (15)$$

With this generalization of the classical Wiener-Hopf approach all singular covariance matrices can also be included. In such cases a unique solution is obtained after a filtering that minimizes the unweighted variance according to (13) and (15). We can now use our prediction procedure to compute new values at all observation points. The errors between the observations and the predictions can be used as a measure of the degree of filtering that was needed in order to obtain a unique solution. A slightly different procedure has been used for non-singular covariances in the excellent study by Moritz 1969. When using singular covariance matrices such a technique does not seem to be justified because filtering is already

included according to (13) and (14). However, there is a possibility of replacing the condition of minimum variance according to (13) by the condition of minimum variance from the error estimates at the observation points. This type of study is not included here for singular matrices. Finally, it should be noted that the singularity of the auto-covariance matrix is somewhat contradictional to the general theory of the stationary stochastic process. Therefore it will be natural to consider a redefinition of the general problem when singularities have been found.

#### Non-singular covariance.

Our problem is considerably simplified when we have exclusively non-singular covariance matrices. This prediction problem has a unique solution which is obtained after the inversion of the matrix  $Q$ . For large sets of observations such an inversion will be extremely tedious. Therefore it will sometimes be more convenient to make use of the auxiliary equations

$$Q Y = L \quad (1)$$

and

$$X = q' Y \quad (2)$$

In this approach we avoid the complete computation of the inverse and reduce somewhat the computational work. For an alternative approach we transcribe eq. (9) of the preceding chapter. Now we write

$$Q (q')^{-1} X = L \quad (3)$$

We consider equation (3) as an observation equation which gives an estimate of  $X$  where the observations  $L$  have the covariance matrix  $Q$ .

Then we have according to the method of least squares

$$R' Q^{-1} \bar{R} \bar{X} = R' Q^{-1} L \quad (4)$$

where

$$R = Q (q')^{-1}$$

For

$$(q')^{-1} = Q^{-1} q (q' Q^{-1} q)^{-1} \quad (5)$$

we obtain

$$\bar{X} = q' Q^{-1} L \quad (6)$$

This solution minimizes the variance

$$(L - RX)' Q^{-1} (L - RX) \quad (7)$$

for each predicted point.

A very much simplified solution is obtained when using the inverse

$$(q')^{-1} = q (q' q)^{-1} \quad (8)$$

Then we form the observation equation

$$Q q (q' q)^{-1} X = L \quad (9)$$

The least squares solution is now obtained from the simple normal equation

$$\begin{matrix} (q' Q q) & X & = & q' q & q' L \\ \ln nn & n1 & 11 & \ln n1 & \ln n1 \end{matrix} \quad (10)$$

Thus we have

$$\bar{X} = (q' Q q)^{-1} q' q q' L \quad (11)$$

minimizing

$$(L - RX)' Q^{-1} (L - RX) \quad (12)$$

for

$$R = Q q (q' q)^{-1} \quad (13)$$

Here we note that the solution according to (10) is extremely simple. The matrix inversion is reduced from the dimension  $n \cdot n$  of (4) and (5) to  $1 \cdot 1$ . If we consider the solution (6) as the pure prediction we have to consider the solution (10) as prediction and filtering. In the practical application of this method we have to check the filtering by recomputation of the observations from the prediction at all observation points. The variance from the errors gives an estimate of the degree of filtering. If the variance from the observation errors is known to be very much smaller we have to modify the  $(q')^{-1}$  matrix. The next step will be to use exclusively the diagonal elements of  $Q^{-1}$  in (5). If the filtering is still unacceptable we can consider using the unfiltered solution (6). This means a tremendous increase of the computational work X.

The preceding study is based on the theory of stochastic processes in combination with least squares solutions. In many cases it will be more convenient to link the prediction method closely to the physical model. This will be shown in the following analysis.

Physical prediction - new approach.

Prediction and filtering have been made with two very different methods. The classical approach is based on the Wiener-Hopf equation for stationary time series. This technique was first used in geodesy by Hirvonen and the procedure was further developed by Kaula, Moritz and Wolf. In these studies the physical properties of the model are not directly examined. Instead a complete computation of the inverse auto-covariance matrix is made and furthermore a computation of the cross-variance matrix is included in order to determine the model for prediction. Another approach has recently been presented (Bjerhammar 1968). This new approach seems to have some important merits. The computational procedure eliminates completely the very tedious inversion of the auto-covariance matrix.

The new method will be further discussed here.

We replace the linear (matrix) prediction model of Wiener-Hopf by the simple (vector) prediction model

$$\begin{matrix} X & = & U & L \\ 11 & & 1n & n1 \end{matrix} \quad (1)$$

If we make use of the Wiener-Hopf solution we have

$$U = q' Q^{-1} \quad (2)$$

This solution we consider unacceptable on account of the difficulties in the numerical calculations for large sets of observations.

If we accept the approach of the preceding chapter we have

$$U = (q' Q q)^{-1} q' q q' \quad (3)$$

$$\begin{matrix} 1n & nn & nl \\ & ln & nl & ln \end{matrix}$$

This U-vector is very simple to compute but is also rejected here because it cannot be used for a pure prediction. (A filtering is always included.)

In our present approach we wish to find a way to compute the elements of the U-vector (for gravity prediction) without previous computation of the complicated inverse of the auto-covariance matrix. This solution should make it possible to make pure predictions without filtering.

The new prediction formula is closely related to the formula for gravity in space

$$\Delta g_j = \frac{r_j^2 - r_o^2}{4\pi r_j} \iint \frac{\Delta g_i}{r_{ij}^3} dS \quad (4)$$

where

$r_j$  = geocentric distance to the point to be predicted ( $P_j$ )

$r_{ij}$  = distance between the point  $P_j$  and  $P_i$

$r_o$  = radius of the earth

$\Delta g$  = gravity anomaly at the moving point  $P_i$  on the reference sphere

$\Delta g_j$  = gravity anomaly to be predicted

$S$  = surface of the earth

Equation (4) is exact for any point in space if there is no mass outside the "spherical" earth. The formula is obtained from Stokes' or Poisson's formulas after elementary transformations.

We replace this integration formula by a summation formula

$$\Delta g_j = \frac{r_j^2 - r_o^2}{4\pi r_j} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta g_i}{r_{ij}^3} \Delta S_i \quad (r_j > r_o) \quad (5)$$

where

$\Delta g_i$  = mean gravity anomaly over the surface element  $\Delta S_i$   
 $n$  = number of surface elements over the earth

This summation formula is a useful approximation of equation (4) when the surface elements are known. However, in most applications it will be rather tedious to define appropriate surface elements for observation points at an arbitrary distribution.

For a constant value of  $\Delta g$  over the whole surface of the earth we have from equation (4)

$$\Delta g_j = \frac{(r_j^2 - r_o^2)}{4\pi r_j} \Delta g \iint \frac{1}{r_{ij}^3} dS = \left(\frac{r_o}{r_j}\right)^2 \Delta g \quad (6)$$

We obtain the corresponding formula for discrete values

$$\Delta g_j = \frac{(r_j^2 - r_o^2)}{4\pi r_j} \Delta g \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{ij}^3} \Delta S_i \approx \left(\frac{r_o}{r_j}\right)^2 \Delta g \quad (7)$$

For equal value of the surface parameters  $\Delta S$  we obtain the approximative solution

$$\Delta S = \frac{1}{\frac{(r_j^2 - r_o^2)}{4\pi r_o^2} r_j \sum \frac{1}{r_{ij}^3}} \quad (8)$$

Thus we have from (5) and (8) the approximation

$\Delta g_j = \frac{r_o^2}{r_j^2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta g_i}{r_{ij}^3}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{ij}^3}} = U \frac{\Delta g}{\ln n}$	(9)
--	-----

This formula gives the correct prediction of gravity in space from any set of error free gravity data of equal value representing surface elements of constant size which cover the whole earth. A bias is unavoidable in all geodetic applications because gravity is missing over large unsurveyed areas.

We also have to check our prediction at all observation points. Here the distance between the prediction point and the corresponding observation point is zero. Thus we have for these points according to (9)

$$E \{ \Delta g_j \} = \Delta g_j \quad (10)$$

This means that our prediction is unbiased for all observation points.

The prediction of gravity data between the observation points is uniquely defined by equation (9) also for points at the surface of the earth. We have already accepted our prediction as correct for any point in space and at the observation points. The distance between the point to be predicted and the surface of the earth can be made as small as we want and we consider our prediction also valid for the surface of the earth.

So far our prediction was based on error free observations which means that we have used pure prediction. If we include observation errors it will be natural to consider some filtering or smoothing.

In our present approach we transcribe (9) as a fictitious observation equation system

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta g_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = \Delta g \quad (11)$$

where

$$x = \Delta g_j \cdot r_j^2 / r_o^2 \quad (\Delta g_j \text{ is the unknown quantity}) \quad (12)$$

The covariance matrix is now

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & \\ r_{1j} & & & & \\ \cdot & \frac{1}{3} & & & \\ r_{2j} & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & \frac{1}{3} & & \\ r_{nj} & & & & \end{bmatrix} \quad (13)$$

This type of "covariance matrix" is "non-stationary" and changes with the position of the predicted point.

Then the solution according to least squares is

$$\bar{x} = (A' Q^{-1} A)^{-1} A' Q^{-1} \Delta g \quad (14)$$

minimizing the following expression

$$\epsilon' Q^{-1} \epsilon = (AX - \Delta g)' Q^{-1} (AX - \Delta g) \quad (15)$$

Here we note that (9) and (14) are identical. At the observation points we have

$$\epsilon' Q^{-1} \epsilon = 0 \quad (16)$$

For a non-spherical earth with rugged topography the condition (16) is still valid if we measure  $r_{ij}$  between points at the surface of the earth:

Now we include observations that are no longer error free. We directly find from equations (11) - (16) that also in this case we get zero estimates at the observation points. In order to obtain a filtering we redefine  $r_{ij}$  of  $Q^{-1}$

$$r_{ij}^2 = r_o^2 + c^2 r_o^2 - 2c r_o^2 \cos \omega \quad (17)$$

where

$\omega$  = geocentric angle between the fixed point and the moving point

$c$  = filtering factor

Thus we have

$c = 1$  no filtering

$c \neq 1$  filtering

$c \rightarrow \infty$  maximal filtering (also for  $c = 0$ )

When we have included filtering, a solution of (11) is still unique according to least squares and the variance (15) is minimized for the actual covariance matrix. This filtering corresponds to a non-stationary stochastic process.

It seems rather contradictional that we obtain a diagonal matrix for the prediction in the new approach and a general matrix with non-diagonal elements in a study according

to Wiener-Hopf. These results are perhaps not quite unexpected. The Wiener-Hopf approach requires that all elements of the covariance matrices have to be determined by the observations. With  $n$  observations we have to compute approximately  $n^2/2$  unknown elements of the covariance matrix for the observations and furthermore all the predictions. Such a mathematical system includes a number of degenerations and it can be proved that diagonal and non-diagonal covariance matrices can be equivalent with respect to the final solution. In our practical application we furthermore have to consider that several of the non-diagonal elements of the Wiener-Hopf covariance matrix are often not significantly different from zero according to stochastic estimates. Anyway we cannot expect identical results from the two different solutions and we have not yet found any proof of the superiority of anyone of the two solutions.

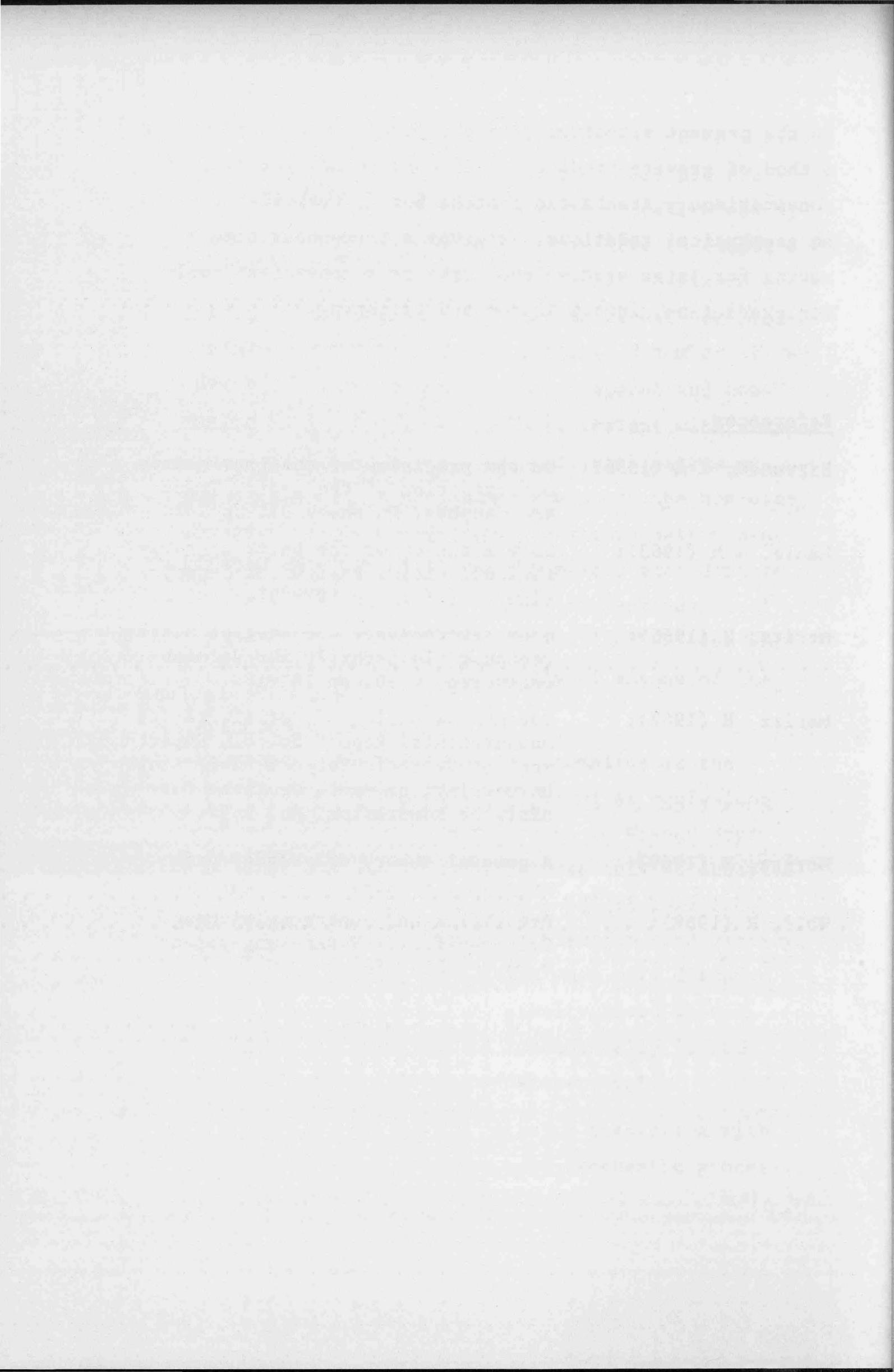
It should be noted that the gravity anomalies at the surface of the earth cannot be considered as equivalent with a stationary time series according to Wiener-Hopf. Such an approach is so crude that it can only be accepted after very careful studies. We know a priori that there is a very close correlation between elevation and gravity. Therefore stationarity is impossible when only distance is considered. Any prediction of gravity based upon a stationary stochastic process is fundamentally in contradiction to the basic theory of Wiener-Hopf.

It has not yet been proved that gravity prediction with height correlation gives a stationary stochastic process.

In the present situation it seems justified to use our new method of gravity prediction. It corresponds partly to a non-stationary stochastic process but is exclusively based on geophysical relations. It gives a tremendous time saving for large systems and works as a convenient tool for prediction, interpolation and filtering.

#### References.

- Hirvonen, R A (1956): On the precision of the gravimetric determination of the geoid. Trans. Am. Geophys. Union, v 37, pp 1-8.
- Kaula, W M (1963): Determination of the earth's gravitational field. Reviews of Geophysics, v 1 (4), pp 507-551.
- Moritz, H (1965): Schwerevorhersage und Ausgleichungsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen, v 90, pp 181-184.
- Moritz, H (1967): Optimum smoothing of aerial gravity measurements. Report No. 81, Department of Geodetic Science, Ohio State University; or Publ. Deutsche Geodätische Kommission, No. A 57.
- Moritz, H (1969): A general theory of gravity processing. Trieste.
- Wolf, H (1969): Prädiktion und Punktausgleichung. Zeitschrift für Vermessungswesen, v 94, pp 165-169.



Problem der Intervallschätzungen bei kleinen  
Messgesamtheiten.

Prof. Dr.-Ing. Josef Böhm, T.H. Prag.

Die im i - ten Augenblick durchgeführte Beobachtung einer bestimmten physikalischen Grösse ergibt den Wert  $\hat{x}_i = x - \varepsilon_i$ , wo der wahre Wert  $x$  durch den augenblicklichen Fehler  $\varepsilon_i = \left\{ \sum_{j=1}^s \delta_j \right\}_i$  belastet wird. Dieser Fehler entstand als Summe einer i-ten Kombination der möglichen Werte von s elementaren Fehlern. Die im i-ten Augenblick geltenden Umstände und Messbedingungen bestimmen nicht nur den zufälligen Wert von jedem einzelnen elementaren Fehler  $\delta_j$ , sondern auch das endliche Intervall von  $(-\delta_j)_{\max}$  bis  $(+\delta_j)_{\max}$  seiner möglichen Werte und auch das mittlere Quadrat  $E(\delta_j - c_j)^2$  als Mass seiner Variation, wobei  $c_j = E(\delta_j)$  der mögliche mittlere Nichtnullwert von  $\delta_j$  bedeutet. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt praktisch für die Grundgesamtheit aller möglichen Werte des resultierenden Fehlers  $\varepsilon_i$  (als hypothetische Ergebnisse aller möglichen Kombinationen von allen in den Bedingungen des i-ten Augenblicks erwarteten Werten bei jedem elementaren Fehler) die normale Verteilung mit den Parametern (Zentrum und Dispersion)

$$E(\varepsilon_i) = c_i = \left\{ \sum_{j=1}^s E(\delta_j) \right\}_i, \quad \widetilde{\sigma_i}^2 = \left\{ \sum_{j=1}^s E(\delta_j - c_j)^2 \right\}_i \quad (1)$$

Danach gilt auch im i-ten Augenblick für den unbekannten wahren Wert  $x$  ein Vertrauensintervall  $J_i$  mit gewählter Wahrscheinlichkeit

$$\bar{P} = P \left\{ (l_i + c_i) - t_{\alpha} \widetilde{\sigma_i} < X < (l_i + c_i) + t_{\alpha} \widetilde{\sigma_i} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_{\alpha}}^{t_{\alpha}} \exp - \frac{t^2}{2} dt = 1 - \alpha, \quad (2)$$

wo  $t = \varepsilon_i: \sigma_i$ . Bei sehr hoch gewählter Wahrscheinlichkeit  $P$  enthält das betreffende Intervall (z.B.  $t_{\alpha} = 2,5$  bei  $P = 99\%$  und  $t_{\alpha} = 2$  bei  $P = 95\%$ ) mit statistischer Sicherheit den unbekannten Wert  $X$  und es bleibt nur ein sehr kleines Risiko ( $\alpha$ ; es ist praktisch unmöglich), dass  $X$  ausserhalb des Intervalls auftreten wird. Die Messbedingungen werden durch die gesamte Qualität von Instrument und Beobachter aber auch durch den augenblicklichen psychischen Zustand des Beobachters und durch die augenblicklichen Verhältnisse (z.B. meteorologischen) des Milieus bestimmt.

In der Natur ist alles in Bewegung und eine Wiederholungsmessung wird schon bei geänderten Umständen durchgeführt werden (andere Sinnenreaktionen, Temperaturgradienten, Ablesungsstriche u.ä.). Der Fehler

$\varepsilon_{i+1}$  entsteht jetzt aus einer  $i+1$ -ten Kombination anderer Werte  $\delta_i$ . Allgemein aber ändern sich auch einige Qualitätsbedingungen (z.B. der psychische Beobachterszustand, die Windstärke, die Intensität der Sonnenstrahlung, bei fortschreitendem Nivelliermoment auch das Gelände). Das bedeutet die Änderung der Breite des Variationsintervalls und des mittleren Quadrats  $E(\delta_i - c_i)^2$  und dadurch auch die Änderung des Verteilungsparameters auf  $\tilde{\sigma}_{i+1} \neq \tilde{\sigma}_i$ . Zu einer Reihe von Beobachtungen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  gehören allgemein auch verschiedene Werte  $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_n$  (fundamentale mittlere Fehler). Die Grundgesamtheit aller möglichen Fehlerwerte  $\varepsilon$  in der Reihe hat praktisch wieder die normale Verteilung mit den Parametern

$$E(\varepsilon) = \sum_{i=1}^m c_i : m = c, \quad \tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{\sigma}_i^2 : m \quad (3)$$

Das Schwanken des Parameters  $\tilde{\sigma}_i$  in der Reihe sollte zu einem positiven Exzess (zu einer schlanken Verteilungskurve) führen, was in allgemeinen aber wieder durch die Verschiebungen der Verteilungszen- ter  $c_i$  kompensiert wird (die Variation eines systematischen Fehlers - z.B. von der Instrumententempe- ratur, der Refraktionsfehler u.s.w. Diese Verschie- bungen führen wieder zum negativen Exzess - zur flachen Kurve). Die Messmethode und verschiedene Eichungen und Korrekturen sollen den Wert  $c$  auf das Minimum reduzieren (es bleibt meistens als Eichungs- fehler, mittlerer Refraktionsfehler u.ä.). Der mittle- re Parameterwert  $\tilde{\sigma}$  erfolgt jetzt aus den mittleren Messbedingungen in der Reihe.

Zu dem ausgeglichenen Wert  $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i l_i$

gehört die Grundgesamtheit möglicher Werte  $\varepsilon_x = x - x = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i$ , normal verteilt mit den Parametern  $E(\varepsilon_x) = c$ ,  $\tilde{\sigma}_x^2 = \tilde{\sigma}^2 \cdot Q_{xx}$ . Es gilt jetzt das Vertrau- ensintervall  $J_x$  entsprechend enger als  $J_i$  nach Gl.(2)

$$P\{(x+c)-t_{\alpha} \tilde{\sigma}_x < X < (x+c)+t_{\alpha} \tilde{\sigma}_x\} = 1-\alpha \quad (4)$$

Der Zahlenwert  $\tilde{\sigma}_x$  bleibt unbekannt und wird ersetzt durch den berechneten Wert  $\bar{\sigma}_x = \tilde{\sigma} \sqrt{Q_{xx}}$ , wo  $\tilde{\sigma}$  als fundamentaler mittlerer Fehler der Messmethode aus den vielen Beobachtungsreihen oder z.B. aus den Stationsausgleichungen oder Widersprüchen im ganz- staatlichen Netze bestimmt wurde. Er wird in dem In- strumentenprospekt oder in der Instruktion angeführt und repräsentiert die mittleren Messbedingungen im

ganzstaatlichen Netz, also die mittlere Qualität von allen eingesetzten Instrumenten und Beobachtern und den herrschenden meteorologischen Verhältnissen. Er gibt auch die Grundlage zur Feststellung des sog. höchstzulässigen Fehlers  $\varepsilon_m = 2 \times 3 \bar{\sigma}$ . Die Einsetzung des Wertes  $\bar{\sigma}_x$  in Gl. (4) ergibt ein gewisses mittleres Vertrauensintervall  $\bar{J}_x$ , wobei aber das wirklich geltende und das die (historischen) wirklichen Messbedingungen ausdrückende Intervall  $J_x$  mit  $\sigma_x$  unbekannt bleibt und vom  $\bar{J}_x$  manchmal ziemlich verschieden sein kann. Und gerade das unbekannte Intervall  $J_x$  wird in der Praxis als die s.g. Toleranz, die mit dem höchstzulässigen Fehler  $(\varepsilon_x)_m$  oder  $(\pm \varepsilon_x)_m$  identisch ist, von vorhinein vorgeschrieben und danach soll die nötige Messgenauigkeit  $\sigma$  und der Gewichtskoeffizient  $Q_{xx}$  geplant werden :

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{Q_{xx}} \leq \{(\varepsilon_x)_m - c_m\} : t_x \quad (5)$$

und so die Nichtüberschreitung der Toleranzgrenzen mit statistischer Sicherheit garantieren. Dabei bedeutet  $c_m$  den höchstgeschätzten möglichen Wert des systematischen Fehlers. Setzt man in die Gl. (5) den durchschnittlichen Wert  $\bar{\sigma}$ , dann ist im Falle  $\sigma > \bar{\sigma}$  das Risiko der Überschreitung der Toleranz grösser als  $\alpha$ . Besonders wichtig ist es deswegen, die obere Grenze des Parameters  $\sigma_{max}$  zu kennen, die für die ungünstigen aber noch zulässigen meteorologischen Verhältnisse und niedrigsten Qualitäten der angesetzten Instrumente und Beobachter gilt, um die Toleranz in keinem Falle zu überschreiten.

Man wird prüfen, ob der s.g. empirische mittlere Fehler

$$\bar{m} = \sqrt{\sum \varepsilon^2 : n} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\sum v^2 : m'}$$

als Schätzung von  $\sigma$  eine genügende Information über die obere Grenze  $\sigma_{\max}$  geben kann. Es gilt zwar die Grenzwertbeziehung  $\lim \bar{m} = \sigma$  bei  $n' \rightarrow \infty$  aber bei endlicher Zahl  $n'$  gilt ein Vertrauensintervall für mögliche zufällige Werte von  $\bar{m}$

$$P\{\tau_1 \sigma < \bar{m} < \tau_2 \sigma\} = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \tau = m : \sigma = \sqrt{\chi^2 : m'} \quad (6)$$

oder für den unbekannten Wert von  $\sigma$

$$P\{g_1 m < \sigma < g_2 m\} = \alpha_1 - \alpha_2, \quad g = \sqrt{m' : \chi^2} = (1 : \tau) \quad (7)$$

Die Gl. (6) ergibt den höchstzulässigen Wert des empirischen mittleren Fehlers  $m_{\max} = \tau_2 \sigma$ , dessen Überschreitung beim Einhalten der bekannten Messgenauigkeit  $\sigma$  praktisch unmöglich ist (also ein Qualitätstest für die ganze Beobachtungsreihe).

Die Gl. (7) ergibt wieder die mögliche obere Grenze der unbekannten Messgenauigkeit  $\sigma_{\max} = g_2 m$ , deren Nichtüberschreitung mit statistischer Sicherheit garantiert wird. Aus den Tafelwerten für  $\chi^2$  werden zwei übersichtliche Tafeln von den Werten

$\tau_{\alpha}$  und  $g_{\alpha}$  zusammengestellt:

$$\text{Tafel 1 : } \tau_{\alpha} = \sqrt{\chi^2_{\alpha} : m'}$$

$\alpha \backslash n'$	1	2	5	10	30	100	$\infty$
99%	0,01	0,10	0,33	0,51	0,71	0,84	1
95%	0,06	0,23	0,48	0,63	0,79	0,88	1
5%	1,96	1,73	1,49	1,35	1,21	1,12	1
1%	2,58	2,15	1,74	1,52	1,30	1,17	1

Tafel 2 :

$$g_{\alpha} = \sqrt{m : \chi^2_{\alpha}}$$

$\alpha$	$m'$	1	2	5	10	30	100	$\infty$
99%		0,39	0,47	0,58	0,66	0,77	0,86	1
95%		0,51	0,58	0,67	0,74	0,83	0,90	1
5%		15,90	4,40	2,09	1,59	1,27	1,13	1
1%		79,80	9,97	3,00	1,98	1,42	1,20	1

Im Falle einer kleinen Anzahl  $m'$  von überschüssigen Beobachtungen ergibt die Tafel 2 für  $g_{\alpha}$  so breite Vertrauensintervalle, dass sie für die Praxis wertlos sind. In der Geodäsie kommen sehr häufig die s.g. Doppelmessungen vor (Längen-, Nivellements- und tachymetrische), wo  $m=2$  und  $m'=1$ . Z.B. wenn zufällig  $m=\bar{\sigma}$ , gilt für den unbekannten Wert der wirklichen Grundgenauigkeit die statistische Sicherheit 99% erst für den Fall  $\sigma_{max} = 79,8\bar{\sigma}$ . Dagegen kann man bei ungünstigen Messbedingungen höchstens eine durchschnittliche Verdoppelung der Variationsbreite bei den elementaren Fehlern und so höchstens  $\sigma_{max} = 2\bar{\sigma}$  erwarten. Selbstverständlich bekommt man zufälligerweise eine noch höhere Grenze  $\sigma_{max}$  bei  $m > \bar{\sigma}$  und wiederum eine kleinere bei  $m < \bar{\sigma}$ . Die Zufälligkeit des empirischen mittleren Fehlers  $m$  wird auch auf das Vertrauensintervall für die unbekannte Grundgenauigkeit  $\sigma$  - die aber konstant ist - übertragen. Die sonst richtigen Gl. (7) und Tafel 2 sind nämlich auf der Voraussetzung gegründet, dass der einzige berechnete Wert  $m$  auch die einzige Information über  $\sigma$  darstellt. Wenn dagegen noch weitere Informationen von den anderen Messreihen oder

auch Kenntnisse über die physikalischen Eigenschaften der Instrumente des Milieus und über die maximal möglichen Werte von elementaren Fehlern vorhanden sind, so kommt es zum Widerspruch der praktischen Erfahrungen mit den Tafelwerten. Wird  $\sigma_{\max}$  als Toleranz vorgegeben, ist die Einhaltung der vorgeschriebenen Genauigkeit ( $\sigma < \sigma_{\max}$ ) erst dann statistisch gesichert, wenn  $m_{\max} < \tau_1 \sigma_{\max}$ , was wieder bei kleinen  $m^1$  zu sehr übertriebener Genauigkeitsforderung führen könnte (z.B.  $\alpha = 1\%$ ,  $m^1 = 1$ ,  $m_{\max} < 0,01 \sigma_{\max}$ ). Später wird dazu ein instruktives Beispiel angeführt.

Zu denselben Schlüssen und Vorbehalten führt auch die Benutzung des empirischen mittleren Fehlers

$m_x = m^1 \sqrt{Q_{xx}}$  in dem Vertrauensintervalle für den unbekannten wahren Wert  $X$ :

$$P\{X - t_{\alpha, m^1} m_x < X < X + t_{\alpha, m^1} m_x\} = \int_{-t_{\alpha, m^1}}^{t_{\alpha, m^1}} \varphi_{m^1}(t) dt = 1 - \alpha \quad (8)$$

mit der Student'schen Verteilung der zufälligen Werte  $t_k = (\xi_x)_k : (m_x)_k$ . Im Gegensatz zum Intervall (4), wo  $t_k = (\xi_x)_k : \sigma_x$  proportional mit  $\xi_x$  wächst ( $\sigma_x = \text{konst.}$ ), entsteht jetzt der Wert  $t_k$  als eine der unendlich vielen Kombinationen von zwei zufällig veränderlichen Größen  $\xi_x$  und  $m_x$ . Ein grosser Wert  $t_k$  muss nicht einen grossen Wert  $\xi_x$  bedeuten.

Die übersichtliche Tafel 3 für die Werte  $t_\alpha$ :

$\alpha \backslash m^1$	1	2	5	10	30	100	$\infty$
$\alpha$	12,71	4,30	2,57	2,23	2,04	1,98	1,96
5%	63,66	9,92	4,03	3,17	2,75	2,63	2,58
1%							

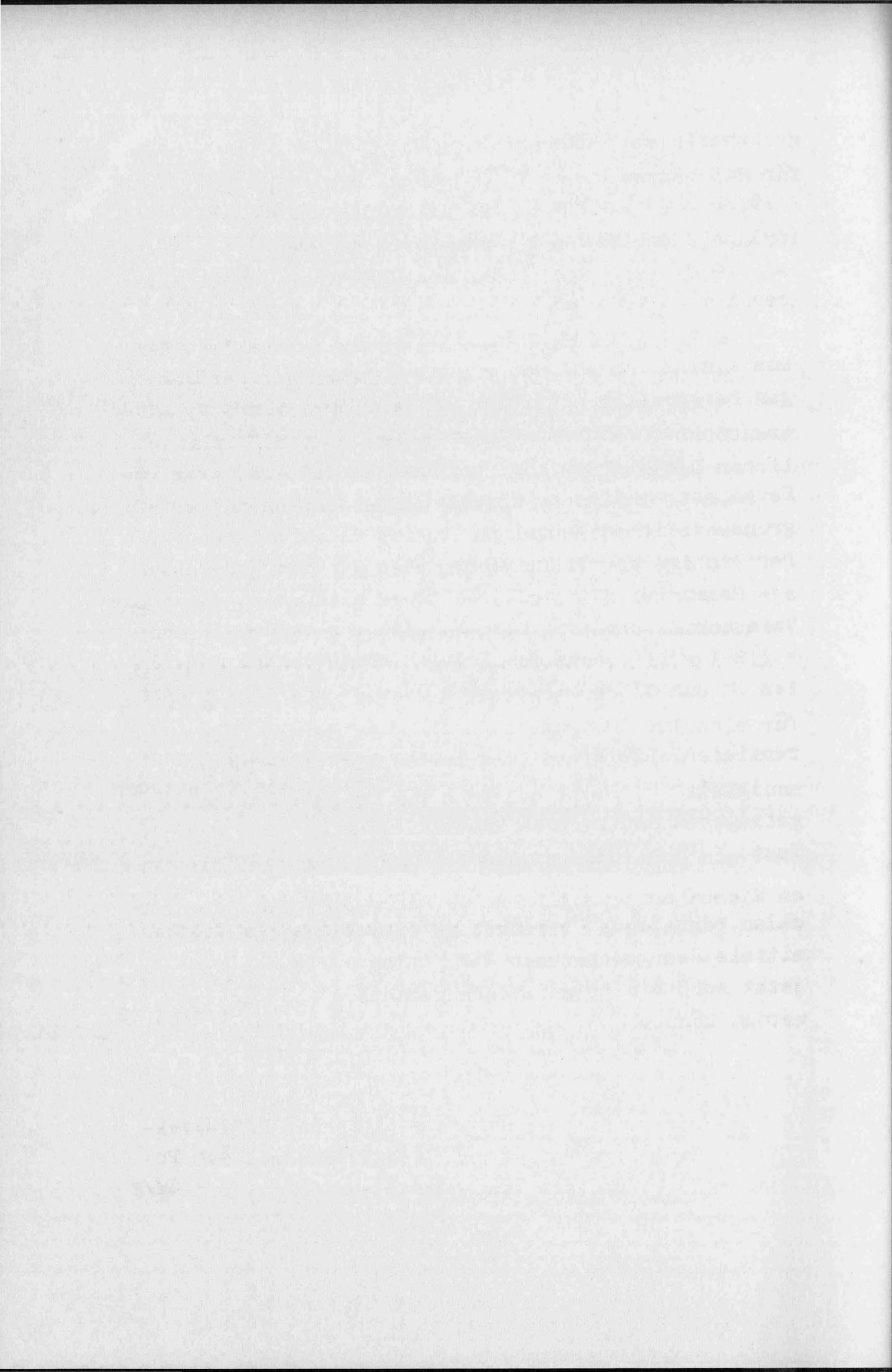
zeigt wieder wertlose breite Intervalle bei einer kleineren Anzahl  $m'$  von überschüssigen Beobachtungen, die wieder aus der Voraussetzung der einzigen Information  $m$  über die Genauigkeit der Methode hervorgehen. Die Zufälligkeit der Grösse  $m$  <sup>geht</sup> auch auf die Intervallbreite über - wobei von vornherein und unabhängig von der durchgeföhrten Messung das "wirkliche" meistens viel engere Intervall  $\pm t_x \bar{\sigma}_x$  existiert. Die Benutzung der Student'schen Verteilung kann so nicht das mit grobem Fehler belastete Ergebnis ausschliessen oder eine verlässliche Information über die gemessene mögliche Baubewegung ergeben.

B e i s p i e l : Für die sorgfältig durchgeföhrte Doppelmessung einer etwa 100 m langen Strecke mit dem 20m- Messband (mit kontrollierter Spannung, Temperatur u.s.w.) soll gelten:  $\bar{\sigma}_x = 1 \text{ cm}$ ,  $(\bar{\sigma}_x)_{\max} = 2 \text{ cm}$  (bei ungünstigen Verhältnissen).

Des weiteren wählt man die statistische Sicherheit  $P = 99\%$ . So gilt von vorherein ein normales Vertrauensintervall für  $X$  in der Breite  $x = \pm 25 \text{ mm}$ , bei ungünstigen Verhältnissen höchstens  $x = \pm 50 \text{ mm}$ . Soll die Toleranz  $\pm 4 \text{ cm}$  vorgeschrieben <sup>sein</sup> und die Unsicherheit in der Bandlänge (Eichung, Temperaturerfassung) höchstens 2 mm betragen, dann ist  $c_x = 1 \text{ cm}$  und nach Gl. (5) ergibt sich für  $(\bar{\sigma}_x)_{\max} = 12 \text{ mm}$  und man muss die Zahl der Messungen auf vier planen. Man bekommt z.B. bei der Doppelmessung die Differenz  $d = 3 \text{ cm}$ ,  $m_x = 15 \text{ mm}$ , was in den zulässigen Grenzen liegt ( $m_x < T_2 \bar{\sigma}_x = 26 \text{ mm}$  bei  $m' = 1$ ). Bei der Voraussetzung des unbekannten Wertes von  $\bar{\sigma}_x$  bekommt man folgende statistisch

gesicherte aber unbrauchbare Intervalle :  $x \pm 94\text{ cm}$   
 für den wahren Wert  $x$  und mögliches  $(\sigma_x)_{\max} =$   
 $= 79,80 \text{ mm} = 1,20 \text{ m}$  ! Bei der vorgeschriebenen  
 $(\sigma_x)_{\max} = 2 \text{ cm}$  ist  $\sigma < \sigma_{\max}$  gesichert nur bei  
 $m_x < 0,01 (\sigma_x)_{\max} = 0,2 \text{ mm}$ , was unmöglich zu realisieren ist.

Schluss. Bei Benutzung eines empirischen aus kleiner Anzahl von  $n'$  überschüssiger Beobachtungen berechneten mittleren Fehlers kann nicht zu brauchbaren Vertrauensintervallen oder zu verlässlichen Deduktionen aus den Messergebnissen führen. Keine mathematischen Spekulationen können da den grundsätzlichen Mangel an Informationen verbessern. Der einzige Weg liegt darin, weitere Informationen aus Messungen mit derselben Methode zu gewinnen oder Versuchsmessungen zu unternehmen oder die Gl.  $(\sigma_x^2)_{\max} = \sum E (\delta^2)_{\max}$  zu benützen und so die Grundgenauigkeiten  $\sigma$  und  $\sigma_{\max}$  zu schätzen und womöglich sie auch für einzelne Instrumente und Beobachter zu differenzieren. Die Einhaltung der minimalen Grundgenauigkeit  $\sigma_{\max}$  soll man nach den in Feldbuch eingetragenen Bedingungen kontrollieren und mit dem Test  $m < T_2 \sigma$  (oder strenger  $m < \sigma_{\max}$ ) prüfen. Diese Massnahmen ermöglichen es nach den Tafeln der normalen Verteilung "vernünftige" Vertrauensintervalle mittels des geschätzten  $\sigma_{\max}$  zu bekommen, die jetzt auch als "statistisch gesichert" betrachtet werden können.



ZUR BESTIMMUNG DER SCHWEREANOMALIEN IM ÄUSSEREN  
RAUM AUS DER BEOBUCHTUNG KUNSTLICHER ERDSATELLITEN

M. Burša, Praha

Wir werden voraussetzen, dass aus der Analyse der Bahnänderungen künstlicher Erdsatelliten ein genügend umfangreiches und genaues Komplex von dynamischen Konstanten (Masseeinfektionen)  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  der Erde so vorhanden ist, so dass es das äussere, zwar generalisierte Schwerefeld, aber in bestimmten Elementen mit entsprechender Genauigkeit, was die mittleren Werte betrifft, definiert. Zur Zeit haben wir die Konstanten zur Verfügung bis  $N = 21$ , falls es sich um zonale Funktionen handelt /6/ und bis  $N = 16$ , für tesserale und sektorielle /7/, aber das Problem ihrer realen Genauigkeit, insbesondere bei höheren Graden  $n$ , bleibt noch offen.

Weiter werden wir voraussetzen, dass uns die geozentrische Konstante  $GM$  des Erdkörpers, die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  und der Massstabsfaktor

$$R_o = \frac{GM}{W_o} \quad (1)$$

bekannt sind, wobei  $W_o$  der Potentialwert des Geoides ist. Praktisch wenden wir die Werte

$$GM = 398\ 603 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{s}^{-2}, \quad \omega = 7,292\ 115\ 15 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}, \quad (2)$$

$$W_o = 62\ 637,23 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}/8, \quad R_o = 6\ 363\ 675 \text{ m}/8/$$

an.

Zunächst werden wir den geozentrischen Radiusvektor einer beliebigen äusseren Niveaufläche mit dem Potentialwert  $W$  und dem Längenmassstabsfaktor  $R = GM/W$

ausdrücken

$$Q = R \left[ 1 + A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (A_n^{(k)} \cos k\vartheta + B_n^{(k)} \sin k\vartheta) P_n^{(k)}(\sin\phi) \right]; \quad (3)$$

hier gilt für die Koeffizienten A, B, mit Belassung  $(J_2^{(0)})^3, J_2^{(0)}, J_4^{(0)}$ , aber durch Vernachlässigung sämtlicher anderen Produkte  $J_n^{(k)} J_m^{(k)}, S_n^{(k)} S_m^{(k)}$

$$A_0^{(0)} = \frac{1}{3}\nu^{-3}q + \frac{2}{5}\nu^{-6}q^2 - \frac{1}{15}\nu^{-1}J_2^{(0)}q - \frac{2}{5}\nu^4(J_2^{(0)})^2 + \quad (4)$$

$$+ \frac{24}{35}\nu^{-9}q^3 - \frac{8}{35}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 + \frac{1}{21}\nu(J_2^{(0)})^2q +$$

$$+ \frac{2}{5}\nu^6(J_2^{(0)})^3,$$

$$A_2^{(0)} = \nu^2 J_2^{(0)} - \frac{1}{3}\nu^{-3}q - \frac{4}{7}\nu^{-6}q^2 + \frac{5}{21}\nu^{-1}J_2^{(0)}q - \frac{4}{7}\nu^4(J_2^{(0)})^2 -$$

$$- \frac{8}{7}\nu^{-9}q^3 + \frac{4}{7}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 - \frac{1}{21}\nu(J_2^{(0)})^2q +$$

$$+ 3\nu^6(J_2^{(0)})^3 - \frac{12}{7}\nu^6J_2^{(0)}J_4^{(0)} + \frac{2}{21}\nu J_4^{(0)}q,$$

$$A_2^{(1)} = 0, \quad B_2^{(1)} = 0, \quad A_2^{(2)} = \nu^2 J_2^{(2)}, \quad B_2^{(2)} = \nu^2 S_2^{(2)},$$

$$A_4^{(0)} = \nu^4 J_4^{(0)} + \frac{6}{35}\nu^{-6}q^2 - \frac{6}{35}\nu^{-1}J_2^{(0)}q - \frac{36}{35}\nu^4(J_2^{(0)})^2 +$$

$$+ \frac{216}{385}\nu^{-9}q^3 - \frac{192}{385}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 + \frac{6}{77}\nu(J_2^{(0)})^2q +$$

$$+ \frac{108}{55}\nu^6(J_2^{(0)})^3 - \frac{120}{77}\nu^6J_2^{(0)}J_4^{(0)} - \frac{19}{77}\nu J_4^{(0)}q,$$

$$A_6^{(0)} = \nu^6 J_6^{(0)} - \frac{8}{77}\nu^{-9}q^3 + \frac{12}{77}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 - \frac{6}{77}\nu(J_2^{(0)})^2q +$$

$$+ \frac{18}{11} \nu^6 (J_2^{(o)})^3 - \frac{30}{11} \nu^6 J_2^{(o)} J_4^{(o)} + \frac{5}{33} \nu J_4^{(o)} q ,$$

$$A_n^{(o)} = \nu^n J_n^{(o)} , \quad n = 3, 5; 7, 8, 9, \dots, N ,$$

$$\begin{aligned} A_n^{(k)} &= \nu^n J_n^{(k)} \quad n = 3, 4, \dots, N, \\ B_n^{(k)} &= \nu^n S_n^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad \nu = \frac{a_o}{R} , \quad q = \frac{\omega^2 a_o^3}{GM} ,$$

wobei  $a_o$  der Längenfaktor ist, der verursacht, dass die Konstanten  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  dimensionslose Koeffizienten werden. Die numerischen Werte der Koeffizienten  $A$ ,  $B$ , die aus den Konstanten /6/, /7/ ermittelt wurden, enthält die Tafel 1 und 2 ( $\bar{A}_n^{(k)}$ ,  $\bar{B}_n^{(k)}$  - normierte).

Weiter kann  $g$  in einem beliebigen äusseren Punkt, mit sphärischen Koordinaten  $(\varrho, \Phi, \lambda)$ , ausgedrückt werden:

$$g = \frac{GM}{\varrho^2} \left[ C_o^{(o)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (C_n^{(k)} \cos k\lambda + D_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] ; \quad (5)$$

die Ausdrücke für die Koeffizienten  $C$ ,  $D$ , wurden in /9/ abgeleitet.

Wenn wir nun in (5) den Radiusvektor der äusseren Niveauläche (3) einsetzen, erhalten wir  $g$  eben auf derselben:

$$g = \frac{GM}{R^2} \left[ 1 + g_o^{(o)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (g_n^{(k)} \cos k\lambda + h_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] ; \quad (6)$$

die Ausdrücke für die Koeffizienten  $g$ ,  $h$ , /9/ gleichen der bereits erwähnten Genauigkeit:

Tafel 1

n	$A_n^{(o)}$ $10^{-9}$	$R_o A_n^{(o)}$ m	n	$A_n^{(o)}$ $10^{-9}$	$R_o A_n^{(o)}$ m
		$R_o = 6 \ 363 \ 675$			$R_o = 6 \ 363 \ 675$
0	1 150 493	7 321,36	11	- 207	- 1,32
2	-2 241 893	- 14 266,68	12	43	0,27
3	2 555	16,26	13	127	0,81
4	3 087	19,64	14	75	0,48
5	233	1,48	15	180	1,15
6	- 510	- 3,25	16	- 194	- 1,23
7	368	2,34	17	- 88	- 0,56
8	120	0,76	18	241	1,53
9	102	0,65	19	226	1,44
10	362	2,30	20	5	0,03
			21	- 151	- 0,96

Tafel 2

n	k	$\bar{A}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{A}_n^{(k)}$ m	$\bar{B}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{B}_n^{(k)}$ m	n	k	$\bar{A}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{A}_n^{(k)}$ m	$\bar{B}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{B}_n^{(k)}$ m
2	2	2424	15,43	- 1370	- 8,72	8	1	32	0,20	26	0,17
3	1	1983	12,62	261	1,66	2	2	49	0,31	86	0,55
	2	898	5,71	- 639	- 4,07	3	-	58	- 0,37	18	0,11
	3	691	4,40	1440	9,16	4	-	157	- 1,00	76	0,48
4	1	- 535	- 3,40	- 492	- 3,13	5	-	58	- 0,37	63	0,40
	2	333	2,12	712	4,53	6	-	55	- 0,35	264	1,68
	3	998	6,35	- 156	- 0,99	7	-	35	0,22	91	0,58
	4	- 81	- 0,52	342	2,18	8	-	78	- 0,50	69	0,44
5	1	- 55	- 0,35	- 99	- 0,63	9	1	141	0,90	- 16	- 0,10
	2	620	3,95	- 355	- 2,26	2	-	7	0,04	- 84	- 0,53
	3	- 436	- 2,77	- 88	- 0,56	3	-	98	- 0,62	- 120	- 0,76
	4	- 270	- 1,72	84	0,53	4	-	58	0,37	114	0,73
	5	127	0,81	- 606	- 3,86	5	-	6	- 0,04	3	0,02
6	1	- 100	- 0,64	39	0,25	6	-	24	0,15	225	1,43
	2	56	0,36	- 357	- 2,27	7	-	51	- 0,32	- 130	- 0,83
	3	28	0,18	46	0,29	8	-	239	1,52	58	0,37
	4	0	0,00	- 410	- 2,61	9	-	84	- 0,53	94	0,60
	5	- 214	- 1,36	- 530	- 3,37	10	1	116	0,74	- 104	- 0,66
	6	90	0,57	- 76	- 0,48	2	-	32	- 0,20	- 107	- 0,68
7	1	244	1,55	118	0,75	3	-	24	- 0,15	- 144	- 0,92
	2	288	1,83	159	1,01	4	-	49	- 0,31	- 44	- 0,28
	3	206	1,31	- 238	- 1,51	5	-	82	- 0,52	- 146	- 0,93
	4	- 200	- 1,27	- 116	- 0,74	6	-	33	- 0,21	- 207	- 1,32
	5	- 1	- 0,01	100	0,64	7	-	56	0,36	33	0,21
	6	- 262	- 1,67	104	0,66	8	-	76	0,48	- 82	- 0,52
	7	162	1,03	- 69	- 0,44	9	-	7	- 0,04	6	0,04
						10	-	127	0,81	- 27	- 0,17

Tafel 2 (Fortsetzung)

n	k	$\bar{A}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{A}_n^{(o)}$	$\bar{B}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{B}_n^{(k)}$	n	k	$\bar{A}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{A}_n^{(k)}$	$\bar{B}_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$R_o \bar{B}_n^{(k)}$
11	1	4	0,03	31	0,20	14	6	20	0,13	- 61	- 0,39
	2	50	0,32	- 94	- 0,60		7	11	0,07	8	0,05
	3	- 65	- 0,41	- 134	- 0,85		8	- 31	- 0,20	- 63	- 0,40
	4	- 31	- 0,20	55	0,35		9	52	0,33	95	0,60
	5	34	0,22	135	0,86		10	56	0,36	- 44	- 0,28
	6	39	0,25	7	0,04		11	29	0,18	- 85	- 0,54
	7	47	0,30	- 143	- 0,91		12	12	0,08	- 59	- 0,38
	8	67	0,43	- 17	- 0,11		13	54	0,34	46	0,29
	9	121	0,77	- 10	- 0,06		14	- 54	- 0,34	- 13	- 0,08
	10	- 120	- 0,76	- 19	- 0,12	15	1	- 4	- 0,03	41	0,26
	11	121	0,77	- 42	- 0,27		2	- 47	- 0,30	- 17	- 0,11
12	1	- 47	- 0,30	- 32	- 0,20	3	8	0,05	- 6	- 0,04	
	2	28	0,18	78	0,50	4	14	0,09	69	0,44	
	3	60	0,38	57	0,36	5	33	0,21	2	0,01	
	4	- 45	- 0,29	- 23	- 0,15	6	72	0,46	- 123	- 0,78	
	5	24	0,15	44	0,28	7	123	0,78	44	0,28	
	6	- 25	- 0,16	- 1	- 0,01	8	- 101	- 0,64	- 37	- 0,24	
	7	15	0,10	103	0,66	9	23	0,15	28	0,18	
	8	- 6	- 0,04	35	0,22	10	- 22	- 0,14	1	0,01	
	9	- 33	- 0,21	43	0,27	11	- 34	- 0,22	97	0,62	
	10	- 20	- 0,13	5	0,03	12	11	0,07	7	0,04	
	11	- 46	- 0,29	- 49	- 0,31	13	- 38	- 0,24	4	0,03	
	12	- 20	- 0,13	- 60	- 0,38	14	12	0,08	- 28	- 0,18	
13	1	- 58	- 0,37	27	0,17	15	1	0,01	- 15	- 0,10	
	2	- 48	- 0,31	18	0,11	16	1	- 25	- 0,16	79	0,50
	3	25	0,16	- 30	- 0,19		2	22	0,14	32	0,20
	4	- 21	- 0,13	59	0,38		3	- 49	- 0,31	34	0,22
	5	100	0,64	- 49	- 0,31		4	- 12	- 0,08	45	0,29
	6	- 85	- 0,54	62	0,39		5	- 46	- 0,29	33	0,21
	7	- 54	- 0,34	- 3	- 0,02		6	- 60	- 0,38	- 45	- 0,29
	8	- 43	- 0,27	- 21	- 0,13		7	110	0,70	8	0,05
	9	- 27	- 0,17	111	0,71		8	- 88	- 0,56	- 2	- 0,01
	10	90	0,57	- 11	- 0,07		9	9	0,06	- 110	- 0,70
	11	- 35	- 0,22	61	0,39		10	- 31	- 0,20	- 1	- 0,01
	12	- 1	- 0,01	84	0,53		11	7	0,04	- 74	- 0,47
	13	- 72	- 0,46	77	0,49		12	24	0,15	- 35	- 0,22
14	1	- 24	- 0,15	52	0,33		13	36	0,23	22	0,14
	2	33	0,21	- 46	- 0,29		14	- 7	- 0,04	- 24	- 0,15
	3	20	0,13	1	0,01		15	- 36	- 0,23	1	0,01
	4	8	0,05	- 39	- 0,25		16	- 31	- 0,20	9	0,06
	5	- 27	- 0,17	- 24	- 0,15						

$$g_0^{(0)} = -\frac{4}{3}\nu^{-3}q - \frac{3}{5}\nu^{-6}q^2 + \frac{4}{15}\nu^{-1}J_2^{(0)}q - \frac{2}{5}\nu^4(J_2^{(0)})^2 - \\ - \frac{4}{5}\nu^{-9}q^3 + \frac{1}{5}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 + \frac{88}{105}\nu(J_2^{(0)})^2q + \\ + \frac{33}{35}\nu^6(J_2^{(0)})^3 ,$$

$$g_2^{(0)} = \nu^2 J_2^{(0)} + \frac{4}{3}\nu^{-3}q + \nu^{-6}q^2 - \frac{8}{3}\nu^{-1}J_2^{(0)}q - \nu^4(J_2^{(0)})^2 + \\ + \frac{8}{7}\nu^{-9}q^3 - \frac{5}{7}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 - \frac{8}{21}\nu(J_2^{(0)})^2q + \frac{339}{49}\nu^6(J_2^{(0)})^3 - \\ - 4\nu^6 J_2^{(0)} J_4^{(0)} + \frac{4}{3}\nu J_4^{(0)}q ,$$

$$g_4^{(0)} = 3\nu^4 J_4^{(0)} - \frac{2}{5}\nu^{-6}q^2 + \frac{12}{5}\nu^{-1}J_2^{(0)}q - \frac{18}{5}\nu^4(J_2^{(0)})^2 - \\ - \frac{372}{385}\nu^{-9}q^3 + \frac{338}{385}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 + \frac{1416}{385}\nu(J_2^{(0)})^2q + \\ + \frac{21654}{2695}\nu^6(J_2^{(0)})^3 - \frac{60}{11}\nu^6 J_2^{(0)} J_4^{(0)} - \frac{552}{77}\nu J_4^{(0)}q ,$$

$$g_6^{(0)} = 5\nu^6 J_6^{(0)} - \frac{4}{11}\nu^{-4}J_2^{(0)}q^2 + \frac{8}{33}\nu^{-9}q^3 - \frac{48}{11}\nu(J_2^{(0)})^2q + \\ + \frac{108}{11}\nu^6(J_2^{(0)})^3 - \frac{160}{11}\nu^6 J_2^{(0)} J_4^{(0)} + \frac{60}{11}\nu J_4^{(0)}q ,$$

$$g_n^{(0)} = (n-1)\nu^n J_n^{(0)}, n = 3; 5; 7, \dots, N, g_2^{(1)} = 0, h_2^{(1)} = 0, \\ g_2^{(2)} = \nu^2 J_2^{(2)}, g_n^{(k)} = (n-1)\nu^n J_n^{(k)}, n = 3, 4, \dots, N, \\ h_2^{(2)} = S_2^{(2)}, h_n^{(k)} = S_n^{(k)}, k \neq 0;$$

ihre numerischen Werte, die aus den dynamischen Konstanten bestimmt wurden, sind aus der Tafel 3, 4 ersichtlich ( $\bar{g}_n^{(k)}$ ,  $\bar{h}_n^{(k)}$  - normierte).

Jetzt sind wir in der Lage zu den gemischten Schwer-anomalien heranzutreten. Dazu müssen wir das normale Schwei-

Tafel 3

n	$g_n^{(o)}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} g_n^{(o)}$ mgl	n	$g_n^{(o)}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} g_n^{(o)}$ mgl
		$\frac{GM}{R_o^2} = 984293,42$			$\frac{GM}{R_o^2} = 984293,42$
0	-4 592 431	- 4 520,30	11	- 2 071	- 2,04
2	3 516 942	3 461,70	12	475	0,47
3	5 111	5,03	13	1 520	1,50
4	- 13 209	- 13,00	14	980	0,96
5	931	0,92	15	2 521	2,48
6	- 2 494	- 2,45	16	2 909	2,86
7	2 207	2,17	17	1 414	1,39
8	841	0,83	18	4 091	4,03
9	817	0,80	19	4 060	4,00
10	3 259	3,21	20	99	0,10
			21	- 3 021	2,97

Tafel 4

n	k	$-(k)$ $g_n^{(o)}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} g_n^{(k)}$ mgl	$h_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} h_n^{(k)}$ mgl	n	k	$-(k)$ $g_n^{(o)}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} g_n^{(k)}$ mgl	$h_n^{(k)}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} h_n^{(k)}$ mgl	
2	2	2424	2,39	-1370	- 1,35	8	1	221	0,22	185	0,18	
3	1	3967	3,90	524	0,52		2	342	0,34	599	0,59	
	2	1796	1,77	-1279	- 1,26		3	- 406	- 0,40	128	0,13	
	3	1381	1,36	2880	2,83		4	-1098	- 1,08	535	0,53	
4	1	-1605	- 1,58	-1477	- 1,45		5	- 406	- 0,40	435	0,43	
	2	999	0,98	2137	2,10		6	- 385	- 0,38	1846	1,82	
	3	2994	2,95	- 469	- 0,46		7	242	0,24	634	0,62	
	4	- 242	- 0,24	1026	1,01		8	- 549	- 0,54	485	0,48	
5	1	- 218	- 0,21	- 396	- 0,39	9	1	1127	1,11	- 131	- 0,13	
	2	2480	2,44	-1420	- 1,40		2	57	0,06	- 670	- 0,66	
	3	-1744	- 1,72	- 352	- 0,35		3	- 784	- 0,77	- 964	- 0,95	
	4	-1080	- 1,06	336	0,33		4	465	0,46	915	0,90	
	5	510	0,50	-2423	- 2,38		5	- 49	- 0,05	24	0,02	
6	1	- 502	- 0,49	193	0,19		6	196	0,19	1796	1,77	
	2	279	0,27	-1784	- 1,76		7	- 408	- 0,40	-1037	- 1,02	
	3	142	0,14	228	0,22		8	1903	1,87	465	0,46	
	4	- 2	0,00	-2048	- 2,02		9	- 670	- 0,66	751	0,74	
	5	-1069	- 1,05	-2651	- 2,61		10	1	1040	1,02	- 939	- 0,92
	6	451	0,44	- 380	- 0,37			2	- 285	- 0,28	- 958	- 0,94
7	1	1469	1,45	707	0,70			3	- 212	- 0,21	-1298	- 1,28
	2	1725	1,70	951	0,94			4	- 442	- 0,44	- 396	- 0,39
	3	1238	1,22	-1427	- 1,40			5	- 737	- 0,73	-1317	- 1,30
	4	-1201	- 1,18	- 695	- 0,68			6	- 295	- 0,29	-1860	- 1,83
	5	- 5	0,00	597	0,59			7	506	0,50	295	0,29
	6	-1573	- 1,55	622	0,61			8	681	0,67	- 737	- 0,73
	7	969	0,95	- 415	- 0,41			9	- 64	- 0,06	55	0,05
								10	1142	1,12	- 239	- 0,24

Tafel 4 (Fortsetzung)

n	k	$\frac{-(k)}{g_n}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} \frac{g_n(k)}{mgl}$	$\frac{-(k)}{h_n}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} \frac{h_n(k)}{mgl}$	n	k	$\frac{-(k)}{g_n}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} \frac{g_n(k)}{mgl}$	$\frac{-(k)}{h_n}$ $10^{-9}$	$\frac{GM}{R_o^2} \frac{h_n(k)}{mgl}$
11	1	41	0,04	308	0,30	14	6	255	0,25	- 792	- 0,78
	2	502	0,49	- 943	- 0,93		7	148	0,15	107	0,11
	3	- 646	- 0,64	- 1343	- 1,32		8	- 403	- 0,40	- 819	- 0,81
	4	- 308	- 0,30	554	0,55		9	671	0,66	1235	1,22
	5	338	0,33	1353	1,33		10	725	0,71	- 577	- 0,57
	6	390	0,38	72	0,07		11	376	0,37	- 1100	- 1,08
	7	472	0,46	- 1425	- 1,40		12	161	0,16	- 765	- 0,75
	8	666	0,66	- 174	- 0,17		13	698	0,69	604	0,59
	9	1210	1,19	- 103	- 0,10		14	- 698	- 0,69	- 174	- 0,17
	10	- 1200	- 1,18	- 195	- 0,19	15	1	- 58	- 0,06	579	0,57
	11	1210	1,19	- 420	- 0,41		2	- 652	- 0,64	- 232	- 0,23
12	1	- 520	- 0,51	- 350	- 0,34	3	116	0,11	- 87	- 0,09	
	2	305	0,30	859	0,85	4	203	0,20	971	0,96	
	3	656	0,65	622	0,61	5	464	0,46	29	0,03	
	4	- 497	- 0,49	- 249	- 0,25	6	1014	1,00	- 1724	- 1,70	
	5	260	0,26	486	0,48	7	1724	1,70	623	0,61	
	6	- 271	- 0,27	- 8	- 0,01	8	- 1420	- 1,40	- 521	- 0,51	
	7	170	0,17	1130	1,11	9	319	0,31	391	0,38	
	8	- 68	- 0,07	384	0,38	10	- 304	- 0,30	7	0,01	
	9	- 362	- 0,36	486	0,48	11	- 478	- 0,47	1362	1,34	
	10	- 215	- 0,21	57	0,06	12	159	0,16	101	0,10	
	11	- 509	- 0,50	- 543	- 0,53	13	- 536	- 0,53	58	0,06	
	12	- 215	- 0,21	- 656	- 0,65	14	174	0,17	- 391	- 0,38	
13	1	- 692	- 0,68	321	0,32	16	15	14	0,01	- 217	- 0,21
	2	- 581	- 0,57	210	0,21		1	- 373	- 0,37	1182	1,16
	3	297	0,29	- 358	- 0,35		2	327	0,32	482	0,47
	4	- 247	- 0,24	705	0,69		3	- 731	- 0,72	513	0,50
	5	1199	1,18	- 593	- 0,58		4	- 187	- 0,18	669	0,66
	6	- 1026	- 1,01	742	0,73		5	- 684	- 0,67	498	0,49
	7	- 643	- 0,63	- 37	- 0,04		6	- 902	- 0,89	- 669	- 0,66
	8	- 519	- 0,51	- 247	- 0,24		7	1649	1,62	124	0,12
	9	- 321	- 0,32	1335	1,31		8	- 1322	- 1,30	- 31	- 0,03
	10	1075	1,06	- 136	- 0,13		9	140	0,14	- 1649	- 1,62
	11	- 420	- 0,41	729	0,72		10	- 467	- 0,46	8	- 0,01
	12	- 12	- 0,01	1014	1,00		11	109	0,11	- 1104	- 1,09
	13	- 865	- 0,85	927	0,91		12	358	0,35	- 529	- 0,52
14	1	- 309	- 0,30	671	0,66		13	544	0,54	327	0,32
	2	429	0,42	- 604	- 0,59		14	- 109	- 0,11	- 358	- 0,35
	3	255	0,25	13	0,01		15	- 544	- 0,54	12	0,01
	4	107	0,11	- 510	- 0,50		16	- 467	- 0,46	140	0,14
	5	- 349	- 0,34	- 309	- 0,30						

refeld so definieren, wie es bisher in der gravimetrischen Praxis üblich ist, das heisst nach dem System des Pizzetti-Niveauellipsoides (Normalformel nach Cassinis, 1930) sowie nach dem Helmert-System des Normal-sphäroides (normale Schwereformel nach Helmert, 1901 - 1909).

### System des Niveauellipsoides (normale Schwereformel nach Cassinis, 1930)

Das System wird mittels vier freien Parametern definiert (die Grössen im Normalsystem werden wir oft mit Null bezeichnen), z.B.  $(GM)^0, \omega^0, (J_2^{(0)})^0, a^0$  oder  $(GM)^0, \omega^0, \alpha^0, a^0$  oder  $(GM)^0, \omega^0, \gamma_e, \beta$  oder  $(GM)^0, \omega^0, U_0, \alpha^0[(e^0)^2]$  oder mittels einer weiteren beliebigen Kombination;  $U_0$  ist das Potential des Niveauellipsoides. Zur Zeit ist es zweckmässig stets die Werte  $(GM)^0, \omega^0$  anzuwenden und  $(GM)^0 = GM$ ,  $\omega^0 = \omega$  zu setzen. Das werden wir ausführen und das Potential  $U_0$  ausdrücken, [ $a^0, (e^0)^2$  sind die Parameter des Niveauellipsoides]:

$$U_0 = \frac{GM}{a^0} \left[ 1 + \frac{1}{6}(e^0)^2 + \frac{1}{3}q^0 + \frac{3}{40}(e^0)^4 + 0q^0(e^0)^2 + \right. \\ \left. + \frac{5}{112}(e^0)^6 + 0q^0(e^0)^4 \right], \quad q^0 = \frac{\omega^2(a^0)^3}{GM},$$

$$U_0 = \sqrt{GM\gamma_e} \left[ 1 + \frac{1}{6}\beta + \frac{2}{3}q^0 + q^0\beta - \frac{25}{24}(q^0)^2 - \frac{19}{120}\beta^2 + \right. \\ \left. + \frac{29}{80}q^0\beta^2 - \frac{1663}{672}(q^0)^2\beta + \frac{121}{1680}\beta^3 + \frac{1081}{448}(q^0)^3 \right].$$

Numerisch erhalten wir [ bei gegebenen Werten (2) und  $\gamma_e = 978\ 049\ \text{mgl}$ ,  $\beta = 0,005\ 2884$ ]:

$$U_0 = 62\ 637,43 \cdot 10^3 \text{m}^2\text{s}^{-2}, \quad w_0 - U_0 = -0,20 \cdot 10^3 \text{m}^2\text{s}^{-2}.$$

Wenn wir das Normalsystem mittels Parametern  $\gamma_e, \beta$ ,

$a^0$ ,  $\alpha^0$ , einführen würden, wobei  $a^0 = 63788 \text{ m}$ ,  $\alpha^0 = 1:297$ , dann würden wir einen etwas unterschiedlichen Wert  $U_0$  erhalten. Das ist weniger geeignet, da es für GM wünschenswert ist, einen Wert anzuwenden, der mit GM für den realen Erdkörper auf Grund der gegenwärtigen Ergebnisse, die aus Mondsatelliten und der direkten Messung der Entfernung des Mondes stammen, identisch ist.

### System des Helmert-Normalsphäroides (normale Schwereformel nach Helmert, 1901-1909)

Dieses System, das mittels fünf freien Parametern definiert wird, wurde von Prof. Ledersteger ausführlich untersucht /1-5/, so dass wir seine Ergebnisse ausnutzen können. Wir werden wieder  $(GM)^0 = GM$ ,  $\omega^0 = \omega$  stellen. Es gilt (die Glieder 3. Ordnung vernachlässigt):

$$U_0 = \sqrt{GM} \gamma_e \left[ 1 + \frac{1}{6}\beta + \frac{2}{3}q^0 + q\beta - \frac{5}{6}(q^0)^2 - \frac{23}{120}\beta^2 - \frac{4}{15}\beta_1 \right]$$

wobei  $\gamma_e$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$  Parameter der normalen Schwereformel nach Helmert sind. Numerisch erhalten wir [bei gegebenem Werten (2) und  $\gamma_e = 978\ 030 \text{ mgl}$ ,  $\beta = 0,005302$ ,  $\beta_1 = 0,000\ 007$ ]:

$$U_0 = 62\ 636,95 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}, \quad w_0 - U_0 = 0,28 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}.$$

Der Fortgang bei der Berechnung der gemischten Schwerkraanomalien in den äusseren Punkten  $M(\varrho_M, \phi_M, \lambda_M)$  kann folgender sein:

1. Wir bestimmen das Schwerkraftpotential  $w_M$  im Punkt  $M$ :

$$w_M = \frac{GM}{\varrho_M} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \left( \frac{a_0}{\varrho_M} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\lambda_M + S_n^{(k)} \sin k\lambda_M) P_n^{(k)} (\sin \phi_M) + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{\varrho_M} \right)^{-3} q \left[ 1 - P_2^{(0)} (\sin \phi_M) \right] \right\} .$$

2. Wir bestimmen den Radiusvektor  $\rho_N^o$  des Punktes N, in dem das normale Potential  $U_N$  gleich

$$U_N = w_M - (w_o - U_o)$$

ist:

$$\rho_N^o = \frac{GM}{U_N} \left\{ 1 + (A_o^{(o)})^o + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})^o \cos k\lambda_M + (B_n^{(k)})^o \sin k\lambda_M] P_n^{(k)} (\sin \phi_M) \right\},$$

wobei die Koeffizienten  $(A_o^{(o)})^o, (A_n^{(k)})^o, (B_n^{(k)})^o$  mit den Ausdrücken (4) gegeben sind; es müssen nur statt der dynamischen Konstanten des wirklichen Erdkörpers die Konstanten des normalen Körpers angewendet werden.

3. Wir bestimmen die wirkliche Schwere  $g_M$  im Punkt M nach (6):

$$g_M = \frac{GM}{\rho_M^2} \left[ C_o^{(o)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=2}^n (C_n^{(k)} \cos k\lambda_M + D_n^{(k)} \sin k\lambda_M) P_n^{(k)} (\sin \phi_M) \right].$$

4. Wir bestimmen die normale Schwere  $\gamma_N$  im Punkt N:

$$\gamma_N = \frac{GM}{\rho_N^2} \left[ (C_o^{(o)})^o + (C_2^{(o)})^o P_2^{(o)} (\sin \phi_N) + (C_4^{(o)})^o P_4^{(o)} (\sin \phi_N) + (C_6^{(o)})^o P_6^{(o)} (\sin \phi_N) \right].$$

Die Ausdrücke für die Koeffizienten  $(C_n^{(o)})^o$  sind formal mit den in /9,10/ abgeleiteten Koeffizienten identisch; es müssen nur statt der dynamischen Konstanten des realen Erdkörpers die Konstanten des normalen Erdkörpers angewendet werden.

5. Wir berechnen den Unterschied  $g_M - \gamma_N$ .

Es besteht auch ein anderer Weg, über die normale Derivation des Störpotentials  $T_M = w_M - U_M$ , der aber bereits in vielen Arbeiten diskutiert wurde.

### Literatur

- /1/ K. Ledersteger: Die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides der Erde. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., München 1959.
- /2/ K. Ledersteger: Die Stokesschen Konstanten und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur. Oester. ZfV., XLVII (1959), Nr. 4.
- /3/ K. Ledersteger: Die Neubegründung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde. Sonderh. 24 der Oester. ZfV, Wien 1964.
- /4/ K. Ledersteger: Neue Untersuchungen zur Theorie des Normalsphäroides. Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., (1969), Tomus 4 (1-2), 211.
- /5/ K. Ledersteger: Das Normalsphäroid der Erde und die dynamische Bestimmung seiner geometrischen Parameter. Acta Techn. Hung., 52 (1965), 312.
- /6/ Y. Kozai: Revised Zonal Harmonics in the Geopotential. SAO Sp. Rep. 295, 1969.
- /7/ E.M. Gaposchkin, K. Lambeck: 1969 Smithsonian Standard Earth (II). SAO Sp. Rep. 315, 1970.
- /8/ M. Burša: Potential of the Geoidal Surface, the Scale Factor for Lengths and Earth's Figure Parameters from Satellite Observations. Studia geoph. et geod., 13 (1969), 337.
- /9/ M. Burša: Sur certaines relations entre les paramètres de l'ellipsoïde terrestre et du champ de gravité, en particulier par rapport au système de référence A.I.G. 1967. Bull. géod. No 97, (1970), 261.
- /10/ M. Burša: Geopotential and Gravity on External Surfaces as Derived from Satellite Observations. Studia geoph. et geod., 14 (1970), 10.

Ich möchte noch im Abschluss meinen Mitarbeitern L. Kanda und R. Mařanová meinen herzlichsten Dank für die Ausführung der Rechenarbeiten und Ausfertigung des Manuskriptes aussprechen.

## VERWENDUNG DER INFORMATIONSTECHNIK BEI HYDROELEKTRISCHEN BAUVORHABEN

F.Eidherr

Die Zeiten, in denen man mit Fingerspitzengefühl, oft sogar aufgebaut auf die Intuition einer Persönlichkeit allein ein Unternehmen erfolgreich führen konnte, sind vorbei. Entscheidungen, die nur auf der Urteilskraft eines einzelnen beruhen, können heute in der Regel nicht mehr sicher genannt werden. Neben diese so seltene, unternehmerische, kreative Eigenschaft tritt die "Information", die in den Entscheidungsprozeß eingreift und Entscheidungen als Ergebnis planvoller Überlegungen und Auswahl ermöglicht.

Jede Entscheidung stellt sich als Wahl zwischen mehreren, oft sehr vielen möglichen Alternativen dar und bedarf in einer Welt wachsender Informationsbedürfnisse und zunehmender Kompliziertheit der Betriebsprozesse der Unterstützung durch gesteuerte Information.

Sollen die Entscheidungen gut sein, braucht man gute Informationen, die ständig neu erarbeitet werden müssen. Sie stellen die Grundlage für die außerordentlichen Wachstumsvorgänge staatlicher, militärischer und wirtschaftlicher Organisationen dar.

Um die großen, oft auch gemeinsamen Ziele zu erreichen, sind Mengen von Informationen zu beschaffen, zu

verarbeiten, auszuwerten und weiterzugeben. Die Handhabung und Nutzung von Informationen ist nur mehr mit dem Funktionieren des Nervensystems in einem Organismus vergleichbar.

Informationen sollen verknüpfte Daten, präzise in Darstellung und Aussage sein, d.h. sie müssen in ein System gebracht werden.

C.E.Shannon hat 1948 im Zusammenhang mit Problemen der Fernmeldetechnik den einer Meldung entsprechenden Informationsbetrag der Messung zugänglich gemacht. Auf ihn geht auch die "Informationstheorie" zurück, die in zunehmendem Maße das Interesse der Psychologie, Soziologie und Philosophie findet, weil sich alle menschlichen Handlungen als Entscheidungen angesichts von Ungewißheit auffassen lassen.

Die Informationstheorie befaßt sich mit den Gesetzmäßigkeiten der Übermittlung und Verarbeitung von Informationen. Sie zeigt, wie man die maximale Rate ermitteln kann, aufgrund welcher man für jedes gegebene System eine möglichst irrtumsfreie Information weitergeben kann.

Die Größe des Informationsbetrages hängt einmal von der Anzahl der zur Wahl stehenden Alternativen ab und zum andern von der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Alternativen. Bei verschiedenen Möglichkeiten der Entscheidung bedarf es einer bestimmten Anzahl von Informationseinheiten, soll die Entscheidung richtig ausfallen.

Um z.B. eine von vier Zahlen (zwischen 1 und 4) zu erraten, benötigt man zwei Informationseinheiten, die man sich z.B. durch die beiden Fragen "Ist die Zahl ungerade?" (Antwort: "Nein") und "Ist es die Zahl 2?" (Antwort: "Nein", also ist es die Zahl 4) beschaffen kann.

Zur Identifikation einer zwischen 1 und 16 gelegenen Zahl sind im Durchschnitt 4 Informationseinheiten notwendig.

Information im technischen Sinne ist quantitativ und nicht qualitativ, sie soll Ungewißheit oder Unwissenheit beseitigen, dabei jedoch die "Redundanz" nicht außer acht lassen.

REDUNDANZ ist der Überfluß der nicht ausgenützten Möglichkeiten eines Informationssystems bei einer übertragenen Nachricht.

Als Beispiel diene die Tatsache, daß wir beim Sprechen die uns zu Gebote stehenden Möglichkeiten nur sehr bescheiden ausnützen.

Die Redundanz beträgt nach J.M.Stroud

$$1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 - \frac{8}{66} = 0,88 = 88\%$$

H = bit pro Sekunde

8 bit = theoretisches Maximum

66 " = normale Leistung pro Sekunde.

Im täglichen Leben begegnen wir einer sehr hohen Redundanz, wenn jemand sich umständlich ausdrückt, d.h. mit vielen Worten wenig sagt. Der Grund ist meistens nicht Un geschicklichkeit, sondern der Wunsch, das Verständnis zu sichern, bzw. Mißverständnisse auszuschalten.

Sollten in einem Informationssystem Mißverständnisse auftreten, bedeutet dies, daß auf Seiten des Empfängers Information erzeugt wird, für die beim Sender kein Gegenwert vorhanden ist. Es ist dies eine immer wiederkehrende Wahrnehmung bei einer unvollständigen Informationsübertragung.

Die in rascher Entwicklung begriffene INFORMATIONSTHEORIE bedient sich zur Behebung dieses Umstandes immer mehr der höheren Mathematik und der engen Beziehung zur Kybernetik.

Die Kybernetik ist die allgemein wissenschaftliche Theorie von der Steuerung und Regelung in Natur, Gesellschaft

und Technik, die auf den verschiedensten Gebieten der menschlichen Tätigkeit konkrete Anwendung findet.

Informationen können aus Wörtern, mathematischen Größen oder Stromimpulsen bestehen. Zum Messen einer Information dient das Binär-oder Dualsystem, die Maßeinheit ist das "bit".

Wurde bisher theoretisch über die Wichtigkeit und den Einflußbereich der Information gesprochen, sei nun der zweckentsprechende Aufbau des Informationswesens an einem großen Kraftwerksprojekt an der Staatsgrenze als Beispiel aufgezeigt.

### 1. Arbeitsteam

Beim Aufbau des Informationssystems war ein gut eingespieltes Team erforderlich, um ein Modellprogramm zu erstellen.

Das Team der Interessenten umfaßte:

- a) Verbundgesellschaft
- b) Strombauamt (für die Donau)
- c) Marchbauregulierung (für die March)
- d) Landwirtschaft
- e) Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen

### 2. Zielsetzung

Grundsatz: Jeder Vorgesetzte und Mitarbeiter benötigt als Grundlage für seine Planung, Entscheidung, Durchführung und Kontrolle jeweils zum richtigen Zeitpunkt die richtigen Informationen.

a) Verbundgesellschaft: Beweissicherungsverfahren für die Grundablösungen

Unterlagen für die Erstellung des Projektes (Pläne und Koordinaten, kontrollierte Maßzahlen)

Unterlagen für die Abfassung des Staatsvertrages

b) Strombauamt und

Erfassung aller Uferpunkte wie Stromkilometer -

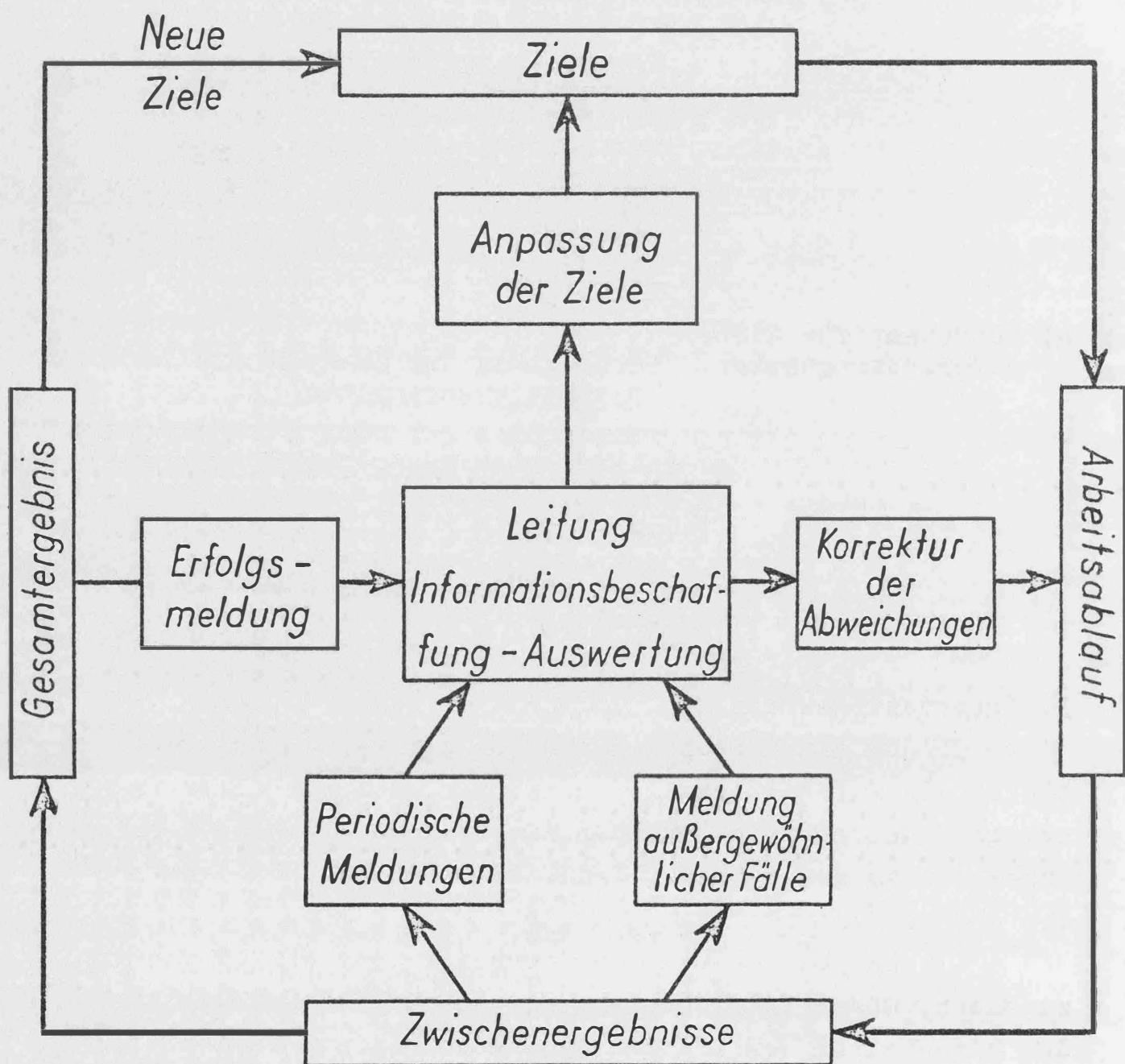
- c) Marchbauregulierung: Evidenz und Profilsteine der Lage und Höhe nach  
Quer- und Längsprofile
- d) Landwirtschaft  
Bodenuntersuchungen  
Ermittlung der stehenden Gewässer, hauptsächlich in den Auen (Luftbildauswertung)  
Aussagen über den Grundwasserspiegel  
Feststellung der Veränderungen im Grundwasserspiegel und damit zu erwartende Änderungen in der Bodenbeschaffenheit  
Agrarverfahren  
Abgeschlossene Bodenschätzung als Grundlage für Ablösungen und Abfindungen
- e) Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen:  
Verdichtung und Überprüfung des Triangulierungsnetzes  
Schaffung eines dichten, gut stabilisierten Festpunktfeldes der Lage und Höhe nach  
Reambulierung bzw. Neuvermessung des betroffenen Gebietes als Unterlagen für das Beweissicherungsverfahren.

### 3. Informationskreis

Um einen funktionierenden geregelten Informationskreis aufrechterhalten zu können, ist vor allem festzulegen, welche Informationen die Vorgesetzten ihren Mitarbeitern zu geben haben, damit diese selbstständig entscheiden und handeln können.

Um jederzeit einen Überblick über das Geschehene zu haben, müssen gleichzeitig die Informationspflichten der Mitarbeiter der Leitung gegenüber fixiert werden.

# Informationsregelkreis



#### 4. Die "Hole- und Bringepflicht".

Grundsatz: In einem derartigen Informationsnetz ist wichtig, daß alle festgelegten Informationen termingemäß an die vorgeschriebenen Stellen abgeliefert werden. Es ist völlig untragbar, daß jemand eine Aufgabe, für die eine andere Stelle eine wichtige Information zu erbringen hat, nicht erledigt, weil er darauf wartet, daß ihm die Information gebracht wird.

In diesem Falle tritt an die versäumte "Bringepflicht" die "Holepflicht". Es muß gleich von vornherein die gezielte Information erkannt und gefordert werden und eine entsprechende Auffächerung erfolgen. Nicht geregelte Informationswege informieren die Leitung schlecht oder gar nicht.

Es ist streng darauf zu achten, daß

- a) die Mitarbeiter jederzeit selbstständig handeln können
- b) der Vorgesetzte jederzeit über das Wesentliche und die Ausnahme informiert ist
- c) die optimale Koordination mit allen anderen Stellen gewährleistet ist.

Es stellte sich heraus, daß der Aktivierung der Informationsbeschaffung und des Informationsflusses besonderes Augenmerk zu widmen ist. Neben allen möglichen technischen Verständigungsmitteln erwiesen sich periodische Koordinationsbesprechungen mit allen Mitarbeitern zur Be seitigung gegenseitiger Störungen am günstigsten.

## 5. Datenverarbeitung

Der seit 1957 maschinell geführte Kataster erwies sich im Sinne einer Datenbank als besonders wertvolle Informationsquelle.

Das ganze Gebiet von 35 km Länge und durchschnittlich 8 km Breite ( $280 \text{ km}^2$ ) konnte je nach Wunsch und Bedarf in allen Informationsbereichen in kürzester Zeit erfaßt werden.

Zusammenstellungen nach Grundstücken mit Flächenangaben, Benutzungsarten mit Ertragsmeßzahlen, Eigentümern, Grundbuchseinlagezahlen, Namensverzeichnissen mit Anschriften u.s.w. konnten jedem Interessenten in beliebigen Gleichstücken ehestens geboten werden, wobei die Zusammenfassung nach Katastralgemeinden für die politischen Gemeinden als Übersichtsinformation von besonderer Bedeutung war.

Eine optimale Ausnützung wäre zu erzielen gewesen, hätten Kataster und Grundbuch über eine gemeinsame Datenbank verfügt.

24 Katastralgemeinden mit ca 35 000 Grundstücken wurden nach den ob angeführten Gesichtspunkten registriert und als Information zur Verfügung gestellt.

Das Festpunktfeld umfaßte 1200 Einschaltpunkte, die mit Hilfe der numerischen Photogrammetrie bestimmt wurden.

Weitere Auswertungen des Informationsmediums "Luftbild" ergaben einen Luftbildplan (sehr ebenes Gelände) 1:1000, Vergrößerungen und Entzerrungen für Detailprojekte und Schichtenauswertungen für angegebene Gebiete.

Ermittlung des Normal-, Hoch- und Tiefwasserstandes.

Aussagen über den Verlauf der Staatsgrenze in den fließenden Gewässern.

Reambulierung durch graphische Auswertung des ganzen Gebietes und Berichtigung des betroffenen Mappen-

materials auf Grund einer Originalauswertung im Maßstab 1:1000.

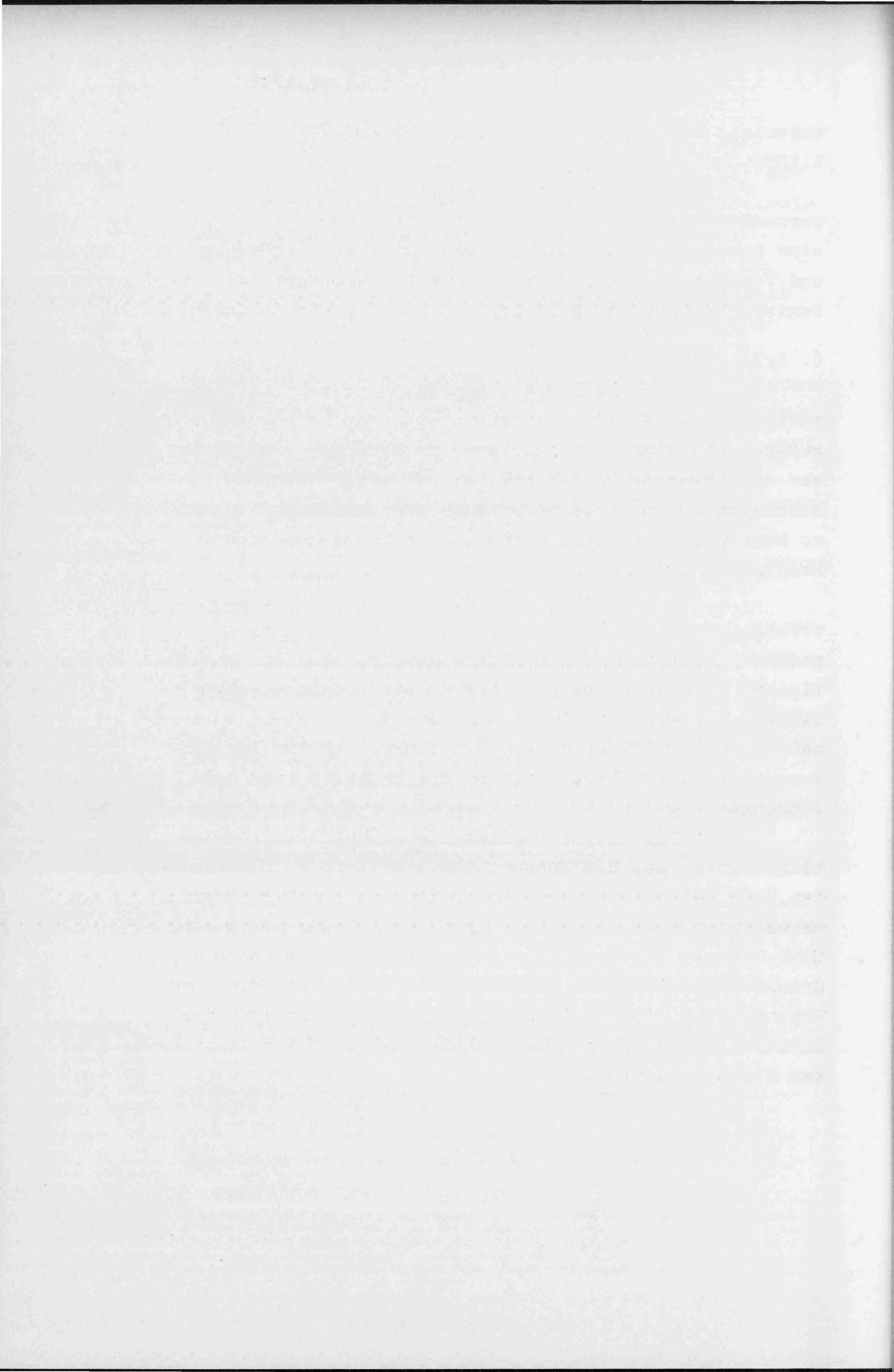
Besonderes Augenmerk mußte auf die Umbildung verwendet werden. Da es sich im betroffenen Gebiet um eine homogene Katastralmappe ohne örtliche Verdrehungen und Verzerrungen handelte, konnte die elektronische Datenverarbeitung in optimalster Weise eingesetzt werden.

## 6. Erfolgsauswertung.

Mit Hilfe der zur Verfügung gestellten Informationen konnten die Interessenten ihre Zielsetzung zeitgerecht und klaglos erreichen. Das wichtigste Ergebnis war die Erkenntnis, daß bei dem geplanten Vorhaben die Boden- und Fruchtbarkeitsverhältnisse durch den Rückstau so untragbar verändert wurden, daß eine entsprechende Neuplanung erfolgen mußte.

Das Zusammenwirken der elektronischen Datenverarbeitung, der Photogrammetrie (numerisch und graphisch), elektronischer Entfernungsmeßgeräte, der automatischen Zeichenanlagen und der modernen Reproduktstechnik bewiesen den Grundsatz, den Herr H.APEL, Wiesbaden, in der ZfV Nr.1/1971 "Wandlungen in der Vermessungstechnik des Katasters" an die Spitze seiner Ausführungen stellte.

" Das Liegenschaftskataster ist ein Informationssystem, das dem Bürger, dem Staat und den Gemeinden, der Verwaltung, der Wirtschaft und der Technik die notwendigen Daten über das Eigentum am Grund und Boden, über Grenzen und Grenzeinrichtungen, über die Größe der Grundstücke, über Art und Umfang der Bodenbedeckung und Bodennutzung, über Größe, Struktur und Ertragswert der landwirtschaftlich genützten Böden und über die überbauten Flächen liefert."



Eine Beziehung zwischen Horizontal- und Vertikalgradienten an Unstetigkeitsflächen der Dichte.

W. Embacher, Innsbruck.

Zusammenfassung: Es wird gezeigt, daß die Schwerkraftdifferenzen, welche in der Falllinie eines Hanges gemessen werden, nur von der mittleren Dichte des Untergrundes und vom Neigungswinkel des Hanges abhängig sind. Außerdem wird ein einfacher Ausdruck für die Differenz der Vertikalkomponenten der Anziehungskraft dieses Hanges auf zwei Meßpunkte (topographische Reduktion) gewonnen.

Die Bruns'schen Formeln werden als bekannt vorausgesetzt:

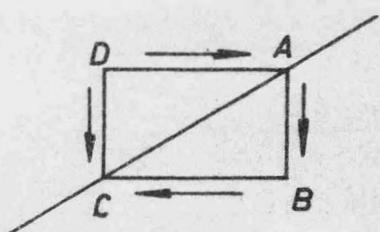
$$\left. \begin{array}{l} H_i - H_a = -4\pi k^2 \sigma \cos \delta \sin \delta \\ V_i - V_a = -4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta \end{array} \right\} \quad 1,00$$

Es soll die Falllinie eines schrägen Hanges als Unstetigkeitsfläche der Dichte eine Gerade sein. Weiters soll

$$\frac{\Delta g}{h} = V_i - V_a = -4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta \quad 1,01$$

und

$$\frac{\Delta g}{s} = H_i - H_a = -4\pi k^2 \sigma \cos \delta \sin \delta \quad \text{sein.} \quad 1,02$$



In den vier Punkten A, B, C, D nebenstehender Abbildung, an der schrägen Grenzfläche zweier Räume mit dem Dichteunterschied

$\sigma$  seien die Schwerewerte  $g_A$ ,  $g_B$ ,  $g_C$  und  $g_D$  gemessen. So ist die Differenz der Vertikalgradienten

ten

$$V_i - V_a = g_B - g_A - g_C + g_D \quad 1,03$$

Wollen wir die Differenz der Gradienten durch  $g_A - g_C$  ausdrücken, so müssen wir die rechte Seite der Gleichung mit  $+ g_A$  und  $- g_A$  erweitern, d.h. es wäre dann

$$g_B + g_D = 2 g_A \quad 1,04$$

und  $g_A$  ist der Mittelwert zwischen  $g_B$  und  $g_D$ .

Aus dem Gradientenbild sieht man, daß es grundsätzlich möglich ist, daß  $g_A$  der Mittelwert aus  $g_B$  und  $g_D$  sein kann, denn die Schwerkraft nimmt von D nach A und von A nach B zu.

Im Innenraum suchen wir zunächst den Zusammenhang von  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ . Bekanntlich finden wir die Darstellung von  $\frac{\partial V}{\partial x}$  für innere Punkte als Summe zweier Potentiale

$$U = \iiint \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{dv}{r}; \quad W = \iint \frac{\sigma \cos(N, \xi)}{r} do \quad 1,05$$

und damit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = W + U \quad 1,06$$

Es ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \quad 1,07$$

also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \iint \frac{\sigma \cos(N, \xi) (\xi - x)}{r^3} do + \iiint \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{(\xi - x)}{r^3} dv \quad 1,08$$

$$\text{und } \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \quad 1,09$$

somit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = - \iint \frac{\sigma \cos(N, \xi)(\xi - z)}{r^3} d\sigma + \iiint \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{(\xi - z)}{r^3} dv \quad 1,10$$

Wir können für Schichten in der Nähe der Trennfläche  $\delta$  fast konstant setzen und es gilt mit großer Annäherung

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + r \cos \delta, \quad \zeta = z + r \sin \delta \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \cos \delta - \frac{\xi - x}{r}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \sin \delta - \frac{\zeta - z}{r} \end{aligned} \right\} \quad 1,11$$

daher ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \iint \frac{\sigma \cos(N, \xi) \cos \delta}{r^2} d\sigma + \iiint \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \cdot \frac{\cos \delta}{r^2} dv \quad 1,12$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = - \iint \frac{\sigma \cos(N, \xi) \sin \delta}{r^2} d\sigma + \iiint \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \cdot \frac{\sin \delta}{r^2} dv \quad 1,13$$

somit ist im Innenraum

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \operatorname{ctg} \delta \quad 1,14$$

Wir wollen nun den Vertikalgradienten im Außenraum mit  $V_a$  und im Innenraum mit  $V_i$ , den Horizontalgradienten  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$  im Außenraum mit  $H_a$  und im Innenraum mit  $H_i$  bezeichnen.

Für den Innenraum gilt die Poisson'sche Gleichung.

Wir setzen den Wert für  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$  aus Gleichung (1,14) in diese ein und erhalten bei Vernachlässigung von  $2\omega^2$

$$H_i \operatorname{cot} \delta - V_i = - 4\pi k^2 \sigma \quad 1,15$$

Setzen wir für  $H_i$  die 1. Gleichung (1,00), so erhalten wir

$$H_a \operatorname{cot} \delta - 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta - V_i = - 4\pi k^2 \sigma \quad 1,16$$

oder

$$H_a \cot \delta + 4\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta = V_i \quad 1,17$$

Mit Hilfe der zweiten Gleichung (1,00) ergibt sich daraus die Summe der äußeren Gradienten an der Unstetigkeitsstelle der Dichte mit

$$H_a \cot \delta - V_a = -4\pi k^2 \sigma \quad 1,18$$

Nur dann, wenn die Zunahme der Schwerkraft von D nach A und von A nach B (siehe Abbildung) gleich groß ist, ist die Messungsdifferenz gleich der Differenz von inneren und äußeren Vertikalgradienten. Das heißt, wir müssen die Messungsdifferenz  $\Delta g$  so verbessern wie  $g_A$ , damit  $g_A$  der Mittelwert zwischen  $g_D$  und  $g_B$  ist. Nach Gleichung (1,17) ist die Zunahme der Schwerkraft von D nach B gleich

$$2H_a \cot \delta + 4\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta$$

Die Zunahme von D nach A ist  $H_a \cot \alpha$ , daher müssen wir  $g_A$  und damit  $\Delta g$  um  $2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta$  verbessern. Die endgültige Gleichung (1,01) lautet also

$$\frac{\Delta g}{h} + 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta = V_i - V_a = -4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta \quad 1,19$$

Oder  $\Delta g$  auf 1 m Höhenunterschied bezogen

$$\begin{aligned} \Delta g &= -4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta - 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta = \\ &= -4\pi k^2 \sigma + 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta = -2\pi k^2 \sigma (1 + \cos^2 \delta) \end{aligned} \quad 1,20$$

Die Gleichung (1,15) können wir auch in der Form schreiben

$$-s H_i + h V_i = +4\pi k^2 \sigma \cdot h \quad 1,21$$

wenn  $h$  der Vertikalabstand und  $s$  der Horizontalabstand der beiden Meßpunkte ist. Wenn wir unter  $\Delta g'$  die nicht auf 1 m bezogene Messungsdifferenz, sondern die gesamte Messungsdifferenz verstehen, lautet Gleichung (1,20)

$$-\Delta g' + 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta \cdot h = 4\pi k^2 \sigma \cdot h \quad 1,22$$

Durch Gleichsetzen von (1,21) und (1,22) erhalten wir

$$-sH_i + \Delta g' + hV_i - 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta \cdot h = 0 \quad 1,23$$

Wird im Punkt P eines schrägen Hanges die Schwerbeschleunigung  $g_p$  gemessen, so ist bekanntlich die reduzierte Schwerkraft  $g_o$  in P

$$g_o = g_p + \sigma T_o \quad 1,24$$

wenn  $T_o$  der Einfluß der Topographie in P ist. Die nach Prey reduzierte Schwerkraft  $g_1$  im Punkt  $\bar{P}_1$  in der Lotlinie von  $P_1$  in der Höhe von P ist

$$g_1 = g_p + 0,3086 h - \sigma 0,0838 h + \sigma T_1 - \sigma T_{1u} \quad 1,25$$

Wieder ist  $T_1$  der Topographieeinfluß in  $P_1$  und  $T_{1u}$  der Topographieeinfluß in  $\bar{P}_1$ . Der Horizontalgradient  $H_i$  multipliziert mit dem Abstand von P nach  $\bar{P}_1$  ist dann

$$sH_i = g_1 - g_o = g_p - g_o + 0,3086 h - \sigma 0,0838 h + \sigma(T_1 - T_o - T_{1u}) \quad 1,26$$

also ist

$$-sH_i + \Delta g' + 0,3086 h - \sigma 0,0838 h + \sigma(T_1 - T_o - T_{1u}) = 0 \quad 1,27$$

wobei 0,3086 den normalen Vertikalgradienten in mgal pro Meter bedeutet und 0,0838 gleich  $4\pi k^2$  ist. Zahlreiche Vertikalgradientenmessungen haben gezeigt, daß der äußere Vertikalgradient nicht konstant ist, sondern etwa zwischen 0,2 und 0,5 mgal/m schwankt.

Wir setzen in Gleichung (1,27) statt des konstanten Normalgradienten 0,3086 mgal/m den wirklichen Vertikalgradienten  $V_a$  ein:

$$-sH_i + \Delta g' + h \cdot V_a - 4\pi k^2 \sigma h + \sigma(T_1 - T_o - T_{1u}) = 0 \quad 1,28$$

Die Gleichungen (1,23) und (1,28) ergeben

$$hV_i - 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta h = hV_a - 4\pi k^2 \sigma h + \sigma (T_1 - T_o - T_{1u}) \quad 1,29$$

Wir dividieren durch  $h$  und setzen für  $V_i$  die 2.Gleichung (1,00) ein und erhalten:

$$\frac{\sigma}{h} (T_1 - T_o - T_{1u}) = 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta \quad 1,29$$

Wir sehen also, daß der Einfluß der Topographie auf die Messungsdifferenz, welche auf 1 m Höhenunterschied bezogen ist

$$2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta$$

beträgt.

Es ist selbstverständlich, daß durch die abgeleiteten Gleichungen die wahren Verhältnisse in der Natur nur angenähert werden können, doch hat z.B. die Dichtebestimmung aus Gleichung (1,20) aus zahlreichen Messungen brauchbare Resultate geliefert.

Alle bisher gemessenen Vertikalgradienten stimmen mit angenommenen Modellrechnungen überein, während der Verlauf der Horizontalgradienten in Natur und Modell nicht übereinstimmen. Es soll dies der Gegenstand einer kommenden Arbeit sein.

#### Literatur:

W.Embacher: Zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen. Ö.Z.f.V., 57.Jahrg., Heft 2.

W.Embacher: Ergänzung zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen. Ö.Z.f.V., 57.Jahrg., Heft 4.

Jordan/Eggert/Kneißl: Handbuch der Vermessungskunde, K.Ledersteger: Bd.V, Seite 742ff.

A.Wangerin: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, I.Bd., Seite 71ff.

## ÜBER DIE SCHWIERIGKEITEN IN EINFACHEN PROBLEmen, GEZEIGT AN DER BERECHNUNG DER MONDDISTANZ

Irene Fischer

Ein 70. Geburtstag ist wohl einer von mehreren besonderen Augenblicken im Leben, wo man sich vom Alltag loslässt, um in leicht philosophischer Stimmung das Leben und Treiben rund herum zu überschauen. Anlässlich des 70. Geburtstages von Herrn Professor Dr. Karl Ledersteger erlaube ich mir, zusammen mit meinen besten Wünschen, einen kleinen Beitrag zu seiner Unterhaltung zu senden.

### DIE ENTFERNUNG ZUM MOND<sup>1)</sup>

Im Kreise der Philosophischen Gesellschaft liegt es nahe, die Manen eines grossen Philosophen anzurufen und so möchte ich zunächst einmal damit beginnen, Sie an Plato's berühmte Geschichte von den Höhlenbewohnern zu erinnern. Plato verglich unser Schicksal auf Erden mit dem von Höhlenmenschen, welche gezwungen sind ihr Leben in einer Höhle zu verbringen und dabei den Rücken unentwegt dem Eingang zuzukehren. Ausserhalb der Höhle gibt es Leute, die am Höhleneingang vorübergehen und die verschiedensten Dinge vorbeitragen, aber unsere armen Höhleneschöpfe können nichts davon direkt betrachten, weil sie sich nicht umdrehen können. Eine grosse Flamme vor dem Höhleneingang wirft die Schatten der Vorübergehenden an die innere Höhlenwand. Diese flackernden Schattenfiguren sind alles, was die Höhlenbewohner von der wirklichen Welt sehen. Und daher ist es ihnen unmöglich, jemals die wirklichen Verhältnisse der Aussenwelt verstehen zu lernen.

Einer unserer heutigen philosophischen Wissenschaftler oder wissenschaftlichen Philosophen kritisierte diese pessimistische Allegorie mit dem Argument, dass Plato unseren wissenschaftlichen Scharfsinn sehr unterschätzt habe: Wären diese Höhlenbewohner erstklassige Wissenschaft -

---

<sup>1)</sup> Dieser Vortrag wurde ursprünglich in Englischer Sprache unter dem Titel "The Distance to the Moon" vor der Philosophischen Gesellschaft von Washington, am 19. Januar 1962, gehalten und im Bulletin der Gesellschaft, vol. 16, gedruckt. Mit Copyright Erlaubnis der Gesellschaft ist der Vortrag hier in gekürzter Form und in gelegentlich recht freier Übersetzung der Autorin zu Ehren von Herrn Professor Dr. Karl Ledersteger wiedergegeben. Die zugrundeliegende technische Arbeit erschien in nüchternem Gewande im Astron. J., vol. 67, no. 6, 1962, "Parallax of the Moon in Terms of a World Geodetic System" und im Bull. Géod., no. 71, 1964, "The Distance of the Moon."

ler und Mathematiker, dann würden sie die flackernden Schatten genau beobachten, messen, studieren und schliesslich als Projektionen der Aussenwelt erkennen und daraus ein Modell der Aussenwelt konstruieren.

Ich muss manchmal an diese Geschichte denken, wenn ich unseren Wissenschaftlern zuhöre: sie stellen erst irgendwo ein geheimnisvolles Instrument auf, lesen daran ein paar Zahlen ab, studieren Linien oder Photographien, rechnen dann eine Menge herum und erzählen uns schliesslich, wie gross das Weltall ist, wieweit die Sterne sind und woraus die Sterne und der Mond gemacht sind, als ob sie selber dort gewesen wären! Auch wenn man sich ehrlich bemüht den Ableitungen zu folgen, bleibt doch ein gewisses Staunen, dass das alles auch wirklich stimmen soll! Nehmen wir als Beispiel die Berechnung der Monddistanz:

Nach Lehrbüchern der Astronomie ist es ganz einfach, die Monddistanz durch Beobachtungen zu bestimmen. Man muss bloss den Mond gleichzeitig von zwei möglichst weit voneinander entfernten Sternwarten auf demselben Meridian beobachten, wie z.B. von Greenwich und vom Kap der Guten Hoffnung – und alles übrige ist eine einfache Aufgabe der Schulgeometrie. In dem grossen Dreieck zwischen den Sternwarten und dem Mond ergibt sich der Winkel an jeder Sternwarte aus dem Winkel unter welchem der Mond von dort aus gesehen wird. Dann kann man das Dreieck aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen bekannten Seite zwischen den Sternwarten auflösen, einschliesslich der Monddistanz vom Erdmittelpunkt, da ja der Erdradius gegeben ist.

Das ist natürlich eine vereinfachte Darstellung; im Ernstfall muss man noch ein paar technische Kleinigkeiten berücksichtigen. Sobald man sich aber für letztere interessiert, versinkt man in endlosen Schwierigkeiten und erinnert sich an die melancholische Lebensweisheit, frei nach Wilhelm Busch: "Erstens ist es anders, zweitens als man's lernt".

Die erste technische Kleinigkeit ist die traurige Tatsache, dass Greenwich und das Kap der Guten Hoffnung nicht auf demselben Meridian liegen, sondern eine Längendifferenz von  $18^\circ$  haben. Daher muss man die Mondbewegung während der fünf Viertelstunden zwischen den beiden Beobachtungen berücksichtigen und das ist das Ende des grossen Dreiecks in der einfachen Aufgabe der Schulgeometrie. Jenes Dreieck zerfällt vor unseren Augen in zwei Dreiecke (Abb. 1), mit zwei verschiedenen Entfernungen vom Erdmittelpunkt zu den beiden Mondpositionen und mit der verbindenden Theorie der Mondlaufbahn als Draufgabe.

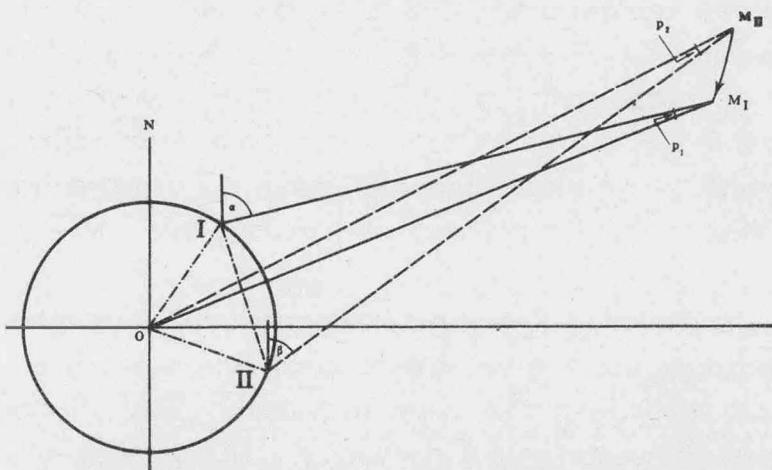


Abb. I. Mösting A gesehen I. von Greenwich  
II. Vom Kap der Guten Hoffnung

Die zweite technische Kleinigkeit ergibt sich aus der üblichen Formulierung dieser Theorie mit Bezug auf den Erdmittelpunkt und nicht mit Bezug auf die beobachtenden Sternwarten, was den Parallaxwinkel hereinbringt. Dieser Winkel gibt den Richtungsunterschied in der Mondbeobachtung von einer der Sternwarten und vom Erdmittelpunkt aus. Ist er bekannt, dann kennt man alle Winkel dieses Dreiecks und kann es mit dem gegebenen Erdradius auflösen; das heisst, man kann auf diese Weise die Monddistanz berechnen. Das Problem der Monddistanz ist daher gleichbedeutend mit dem Problem der Mondparallaxe. Mit anderen Worten, wir verwenden etwas, das wir erst beobachten wollten, und das klingt wie ein circulus vitiosus. Um aus diesem Zirkel herauszukommen, nimmt man den theoretischen Wert für den Augenblick als korrekt an, macht die Beobachtungen, vergleicht sie mit der Theorie und berechnet aus den unvermeidlichen Widersprüchen zwischen beobachteten und theoretischen Werten eine Verbesserung der Theorie.

Eine dritte technische Kleinigkeit ist der Umstand, dass die Geodäten die genaue Länge des Erdradius noch nicht endgültig festgelegt haben, obwohl in diesen Textbüchern alle auf die Erde bezüglichen Messungen als "natürlich bekannt" vorausgesetzt werden. Die Astronomen dagegen haben einen bewundernswert kunstvollen Ausweg erdacht, um den geodätischen Schwierigkeiten auszuweichen: sie haben den Erdradius einfach als die Längeneinheit erklärt und können nun ruhig zuwarten, bis die Geodäten sich über die endgültige Zahl in Kilometern einigen.

Die Geodäten lassen sich Zeit. Sie haben die Vorstellung von der Erdfigur als einer Kugel zur Zeit von Eratosthenes, über das Rotations-

ellipsoid zur Zeit von Newton und den Expeditionen der Académie Royale des Sciences nach Lappland und Peru, zum modernen Begriff des unregelmässigen Geoides (so genannt seit Listing) entwickelt. Heute verwenden wir das Rotationsellipsoid als eine Hilfsfigur, die der unregelmässigen Geoidfläche gut angepasst sein soll. Die Willkürlichkeit in der Wahl einer Hilfsfigur macht es aber nicht ganz so selbstverständlich, dass eines ihrer Bestimmungsstücke in einem entscheidenden Zusammenhang mit der Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt stehen soll.

Eine vierte technische Kleinigkeit hängt damit zusammen, dass der Mond zu verschiedenen Zeiten verschieden weit von der Erde ist. Sogar in derselben Nacht mag die Entfernung sich in den fünf Viertelstunden zwischen den Beobachtungen von Greenwich und vom Kap aus um einige hundert Kilometer ändern. Abb. 2 zeigt die ungefähren Monddistanzen, berechnet aus der bekannten Beobachtungsserie von Christie in Greenwich and Gill am Kap während 104 Nächten in den Jahren 1905 bis 1910. Diese Serie gilt als die klassische Bestimmung der Monddistanz und ist als solche das Prototyp für die eingangs erwähnten Lehrbücher.

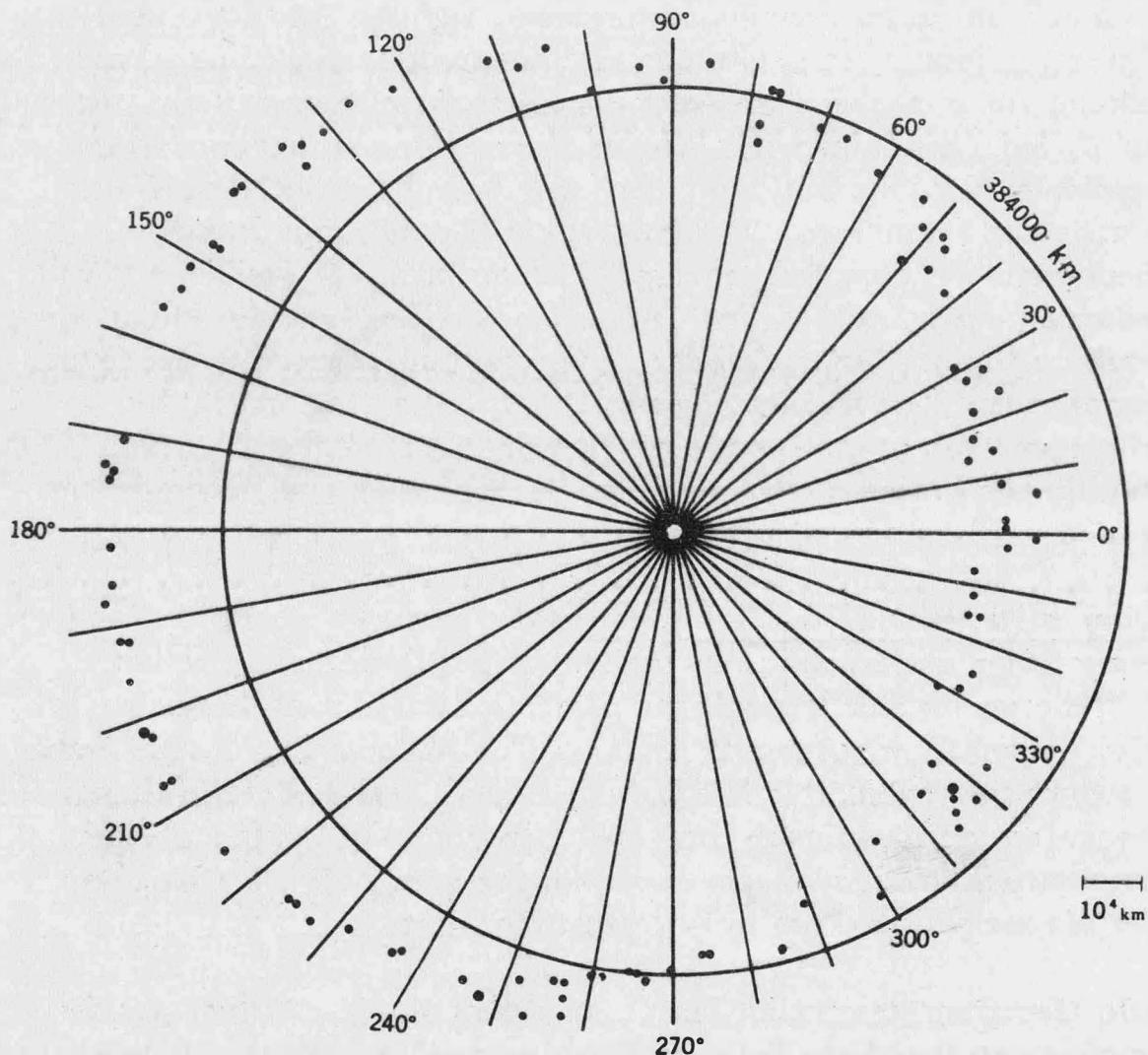


Abb. 2. Geozentrische Monddistanzen.

Die 104 Werte variieren um etwa 40 000 km von einem Bezugswert von 384 000 km. Man sieht leicht, dass diese Mondpositionen in erster Annäherung eine elliptische Bahn mit dem Erdmittelpunkt in einem Brennpunkt formen; die Störungen gehen hauptsächlich auf den Sonneneinfluss zurück. Welche dieser Distanzen meinen wir nun, wenn wir die Monddistanz als eine Konstante festlegen wollen? Wir müssen uns doch wohl auf einen Mittelwert unter Berücksichtigung der Störungen einigen. Aber wie definieren wir diesen?

Aus der Gravitationstheorie haben wir zunächst die bekannte Beziehung

$$a^3 n^2 = k M (1 + \mu),$$

worin  $M$  die Erdmasse,  $k$  die Gravitationskonstante,  $\mu$  das Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse,  $n$  die mittlere Bewegung und  $a$  die grosse Halbachse der Mondbahn bedeutet. Dazu kommt ein Faktor  $(1 + \beta)^{-1}$  für die Sonnenstörung. Die gesuchte Monddistanz wird nun definiert als die modifizierte Entfernung  $a/(1 + \beta)$ .

Die zugehörige mittlere Monddistanz ist in einem rechtwinkeligen Dreieck über dieser modifizierten Entfernung als der anliegende spitze Winkel  $p$  am Mond definiert, der dem Radius  $a_0$  der zunächst kugelförmigen Erde gegenüberliegt. Dann ist

$$\sin p = \frac{a_0}{a/(1 + \beta)} \quad \text{oder } a/(1 + \beta) = \frac{a_0}{\sin p} .$$

Man sieht wieder, dass die Bestimmung der Monddistanz und der Monddistanz gleichwertige Probleme sind.

Wenn wir  $a$  eliminieren und eine mittlere Erdkugel mit Radius  $r_m$  und Anziehungskraft  $g_m$  in der Substitution  $k M = g_m r_m^2$  in Betracht ziehen, dann ergibt sich

$$\sin^3 p = \frac{a_0^3 (1 + \beta)^3 n^2}{g_m r_m^2 (1 + \mu)} .$$

Die Tatsache, dass die Erde keine Kugel ist, führt zu einer neuen Komplikation, da nun die Definition der mittleren Parallaxe vom Radiusvektor der Sternwarte abhängig wird. Welchen Radiusvektor sollen wir für  $a_0$  einsetzen? Man könnte daran denken, konsequent zu bleiben und denselben Radius  $r_m$  jener mittleren Erdkugel zu verwenden, die zum Ausdruck der Erdmasse gedient hat; das wäre der Erdradius in mittlerer Breite. Aber das ist nicht geschehen. Warum auch einfach, wenn es

kompliziert geht! Man hat statt dessen den äquatorialen Radius eines Rotationsellipsoides gewählt. Dann lag es nahe, auch die die Erdmasse beschreibenden mittleren Werte  $r_m$  und  $g_m$  in äquatoriale Werte umzurechnen, wodurch ausser den sechs Werten zur Berechnung von  $\sin^3 p$  noch ein weiterer Ausdruck für die Abplattung des Ellipsoides in Betracht gezogen werden muss. ("Er zählt die Häupter seiner Lieben, Und sieh, statt sechse sind es sieben!" - Frei nach Friedrich Schiller.)

Simon Newcomb schrieb in 1912:

A defect in astronomical practice consists in taking the equatorial radius of the earth as fundamental length to which the moon's parallax is referred, instead of the mean radius... The mean radius should be, in theory at least, adopted as a radius of reference. This radius is best determined by geodetic measurements, and for it gravity is best ascertained.

De Sitter and Jeffreys haben sich ähnlich geäussert. Die angegebenen Gründe bestehen immer noch: sowohl gravimetrische Messungen als auch geodätische Netze sind vorwiegend in den nördlichen mittleren Breiten vorhanden. Die Vermessung des 30. Meridians in Afrika war noch zu Sir David Gill's Zeiten am Kap der Guten Hoffnung, vor etwas über hundert Jahren, ein blosser Traum. Gill begann die Vermessung vom südlichen Ende. Dieser Traum war damals phantastisch genug, um von Jules Verne für seinen Roman "Meridiana" aufgegriffen zu werden. Auch andere Romane, die vor 50 Jahren noch aufregende Unwahrscheinlichkeiten ausmalten, wie z.B. Jules Verne's "Rund um die Welt in 80 Tagen" oder "Zwanzigtausend Meilen unterm Meer" oder "Eine Reise zum Mond" erscheinen uns heute als zahn und primitiv, weit überholt von den derzeitigen noch phantastischeren Wirklichkeiten. Sir David's Traum hat sich in 1954 erfüllt, als das letzte Stück im Sudan und in Uganda unter der Leitung von David Mills vom U. S. Army Map Service vermessen wurde.

Der 30. Meridian hat zweifache Bedeutung für unser Thema der Monddistanz: 1. Dieser Meridianbogen durch Europa und Afrika, sowie auch der gleichzeitig vollendete Meridianbogen durch Nord - und Südamerika, ist etwa  $100^\circ$  lang und daher verlässlicher für die Bestimmung der Erdgrosse als die bisherigen kurzen Bogenvermessungen. 2. Der 30. Meridian ermöglicht es, die Entfernung zwischen den Sternwarten in Greenwich und am Kap der Guten Hoffnung zu berechnen und als Maßstab für die astronomische Konfiguration in Abb. I einzusetzen.

Traditionsgemäss unterscheidet man zwischen der sogenannten geometrischen oder direkt beobachteten Parallaxe und der dynamischen oder Gravitationsparallaxe. Bei der ersten haben wir bestimmte

Beobachtungsstationen auf der Erdoberfläche und Entfernungen sowie Richtungen. Bei der zweiten handelt es sich um die Massen des Mondes und der Erde, einschliesslich der Schwerkraft.

In diesem Sinne mag man neben der oben besprochenen klassischen Bestimmung der Mondparallaxe aus der Greenwich - Kap Serie von Mondbeobachtungen auch zwei andere, sonst sehr verschiedene Methoden als geometrisch bezeichnen: O'Keefe's Berechnung aus Okkultationen und Yaplee's Radarverfahren am U. S. Naval Research Laboratory in Washington, D. C. Alle drei Methoden führen zu verbesserten Werten für die Monddistanz.

Auch die dynamische Methode liefert eine Verbesserung, falls wir die richtigen Zahlenwerte für die Mondmasse und für die auf die Erde bezüglichen Grössen des Radius, der Abplattung und der Schwerkraft einsetzen. Der Unterschied in gegenwärtigen Schätzungen der Mondmasse, z.B., verursacht eine Unsicherheit von ein paar Kilometern in der Monddistanz.

Versuche, eine geometrische und dynamische Bestimmung zu kombinieren, führten auf zwei Gleichungen für zwei Unbekannte, nämlich die Monddistanz und eine der vier anderen Grössen; die übrigen drei wurden eliminiert, indem man die besten Schätzungswerte für sie substituierte. Solche Schätzungen ändern sich allerdings mit der Zeit. So hat man in 1910 den Abplattungswert der Erde aus der Kombination der Greenwich - Kap Beobachtungsresultate mit den damals besten Schätzungen der anderen Grössen berechnet und  $1/294,4$  erhalten, was wir heute nicht als zutreffend anerkennen. Ebenso wurden die Resultate sowohl der Okkultationen als auch der Radarbestimmungen mit modernen Schätzungen der übrigen Grössen verbunden, um den Erdradius zu berechnen - mit verschiedenen Ergebnissen, je nach den adoptierten Schätzungen. Dies soll nur zeigen, dass derartige Bestimmungen nicht allzu wörtlich genommen, sondern eher als Spekulationen betrachtet werden sollten, um die gegenseitigen Einflüsse zu studieren.

Wie weit sind wir doch von der eingangs erwähnten einfachen Schulaufgabe! Mit all den Komplikationen, denen wir in der Bestimmung der Monddistanz begegneten, und mit den heute vorhandenen ganz verschiedenen Methoden wäre es doch ein grosses Wunder, wenn die vier genannten Methoden dasselbe Resultat lieferten. Tatsächlich stimmen drei von ihnen überraschenderweise innerhalb von zwei Kilometern überein. Mit überwiegender Mehrheit 3 : 1 ergibt sich die Entfernung zum Mond als  $384\,400 \pm 2$  km. Die einzige abweichende Stimme besteht auf einer 14 km grösseren Zahl. Interessanterweise ist es die klassische

Methode, die zu dem abweichenden Resultat führt. Warum, wissen wir nicht. Es scheint, dass die angeblich einfachste Methode doch nicht ganz so einfach ist wie es uns die Textbücher glauben machen.

## Theorie und Empirie in der Ausgleichungsrechnung.

---

Von E. Gotthardt, München

Die von F.C. Gauß und Legendre gegen Anfang des 19. Jahrhunderts entwickelte Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate hat äußerlich kaum etwas mit einer Erfahrungswissenschaft zu tun. Rein formell bezweckt sie lediglich, die Quadratsumme der Verbesserungen, die man an den Beobachtungen anzubringen hat, um ein widerspruchsfreies System zu erzielen, zu einem Kleinstwert zu machen.

Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß alle Messungen als gleichgewichtig und voneinander unabhängig betrachtet werden dürfen. Andernfalls tritt an die Stelle der einfachen Quadratsumme der Verbesserungen, in Matrizenform ausgedrückt  $v^T v$ , der Wert der quadratischen Form  $v^T Q^{-1} v$ , wobei  $Q$  die Varianz-Kovarianz-Matrix der Beobachtungen bezeichnet. Sie umfaßt bei  $n$  Beobachtungen nicht weniger als  $(n+1) \cdot n/2$  Größen.

Offensichtlich können diese nicht sämtlich aus dem Beobachtungsmaterial abgeleitet werden, da die Zahl der in der  $Q$ -Matrix auftretenden Grundwerte wesentlich größer ist als die Zahl der Meßwerte. Hieraus ergibt sich die Wichtigkeit des Sonderfalles der gleichgewichtigen und voneinander unabhängigen Beobachtungen, bei dem alle Diagonalelemente der  $Q$ -Matrix untereinander gleich

und als einzige von Null verschieden sind. Hier ist demnach nur eine Unbekannte aus der Ausgleichung zu bestimmen.

Ob dieser Sonderfall vorliegt, muß nach den jeweiligen Besonderheiten der Aufgabe beurteilt werden. Man wird Messungen, die unter vergleichbaren äußereren Bedingungen durchgeführt wurden, bis zum Nachweis des Gegenteils zunächst einmal als gleichgewichtig ansehen.

Zu dieser Prüfung auf Gleichgewichtigkeit hat man die Messungen in Gruppen aufzugliedern, innerhalb deren eine größere Homogenität vermutet wird als für die Gesamtheit der Meßwerte. Es sind dann für die einzelnen Gruppen die Varianzen zu errechnen nach

$$\text{Var}(x) = \frac{\sum(x - \tilde{x})^2}{n-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Die Hypothese, daß die Messungen gleichgewichtig seien, wird dann abgelehnt, wenn sich "signifikante" Unterschiede zwischen den einzelnen Gruppen ergeben. Dabei ist wesentlich, daß die Konfidenzintervalle oder Vertrauensgrenzen um so größer ausfallen, je kleiner man die Gruppen wählt. Nur bei Zusammenfassung sehr vieler Messungen werden die Konfidenzintervalle klein, doch ist es dann häufig fraglich, ob ein derartiges Meßmaterial noch als homogen betrachtet werden darf.

Da demnach die empirische Bestimmung genügend zuverlässiger Beträge für die Varianzen erheb-

liche Schwierigkeiten bereitet, ist es üblich, relative Vergleichswerte aus hinreichend plausiblen mathematischen Modellen abzuleiten. Ein typisches Beispiel hierfür bietet die Ausgleichung von Nivellements, bei denen man die Varianzen als direkt proportional zur Streckenlänge ansetzt und als Gewichtsreziproke bezeichnet.

Durch einen derartigen Rückgriff auf ein geeignetes mathematisches Modell erübrigt sich bei dem bisher üblichen Verfahren der geodätischen Punktbestimmung eine unmittelbare Abschätzung der bei den einzelnen Meßverfahren auftretenden Varianzen. Es bleibt wie bei den eigentlich gleichgewichtigen Messungen nur die Ermittlung einer einzigen Unbekannten, der Varianz einer Messung vom Einheitsgewicht.

Schwieriger liegen die Probleme, wenn die Benutzung eines mathematischen Modells nicht zum Ziele führt, wie bei der Aufgabe, einen Polygonzug streng auszugleichen. Bei dieser neuerdings durch die Entwicklung der elektrooptischen und elektromagnetischen Entfernungsmessung auch für hochwertige Punktbestimmungen bedeutungsvoll gewordenen Methode treten sowohl Winkel- wie auch Streckenmessungen auf, für deren Genauigkeitsverhältnisse man rein theoretisch keine Werte angeben kann. Hier ist man also stets darauf angewiesen, die Varianzen empirisch abzuschätzen, wobei allerdings zusätzlich noch mathematische Modellüberlegungen benutzt werden können, um den

Umfang der herangezogenen Stichproben zu vergrößern.

Besonderen Wert hat man bisher immer darauf gelegt, nur gegenseitig unabhängige Messungen in die Ausgleichung einzuführen. Um dies zu sichern, wurden auch erhebliche Komplikationen bei der Messung in Kauf genommen, die durch die Stichworte "Messung voller Richtungssätze" und "Winkelmessung in allen Kombinationen" angedeutet seien. Neuerdings zeichnet sich jedoch eine gewisse Notwendigkeit ab, auch voneinander abhängige oder, anders ausgedrückt, miteinander korrelierte Messungen einer Ausgleichung zu unterziehen, und zwar ebenfalls in Verbindung mit der elektromagnetischen Entfernungsmessung, die aus verschiedenen Gründen nicht unerheblichen systematischen Verfälschungen unterliegt.

Die rechnerische Ermittlung der Kovarianzen erfolgt nach der Formel

$$\text{Covar } (x, y) = \frac{\sum (x - \tilde{x})(y - \tilde{y})}{n-1} \quad \text{mit } \tilde{x} = \frac{\sum x}{n}, \tilde{y} = \frac{\sum y}{n}.$$

Sie bereitet zwar keine besondere Mühe, doch sind solche empirische Kovarianzwerte noch mehr als die entsprechenden Varianzen zufälligen Einflüssen unterworfen und daher unsicher.

Für die Schwierigkeit, zuverlässige empirische Kovarianzwerte zu erhalten, ist ein Versuch aus jüngster Vergangenheit bezeichnend. Hierbei handelte es sich darum, eine auf Grund eines mathematischen Modells berechnete Korrelation zwischen verschiedenen Orientierungsgrößen mehrerer Bild-

paare zu bestätigen [1]. Die Korrelationswerte, die berechnet wurden nach

$$r = \frac{\text{Covar } (x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{Var}(y)}},$$

belieben sich nach theoretischen Überlegungen auf Beträge zwischen +0,707 und -0,971. Die zu gehörigen Konfidenzintervalle wurden bei den großen Korrelationswerten von -0,971 und -0,966 nur in je einem von neun Fällen eingehalten, bei dem geringeren Wert +0,707 noch in drei von neun Fällen überschritten, bei dem zweitkleinsten Wert -0,576 zweimal. Das der Rechnung zugrunde liegenden mathematische Modell und/oder die für die Bestimmung der Konfidenzintervalle vorausgesetzte Normalverteilung können also nicht als bestätigt gelten, falls man nicht die benutzte Formel als mit einem systematischen Fehler behaftet betrachtet [2]. Für letztere Deutung spricht, daß bei den Korrelationskoeffizienten, die theoretisch verschwinden sollten, unter 90 Werten nur viermal die Grenze des Vertrauensbereichs überschritten wurde, was der angenommenen Wahrscheinlichkeit von 95% ziemlich genau entspricht.

Diese Tatsachen beleuchten die Schwierigkeiten, vor denen man steht, wenn man Kovarianzwerte und Korrelationen bestimmen soll, für die kaum theoretische Anhaltspunkte vorhanden sind. Wie bei der Bestimmung von Varianzen wird man auch hier versuchen, Gruppen von möglichst gleichartigen Messungen zu bilden, um aus ihnen die gewünschten

Werte abzuleiten. Die kürzlich erschienene Dissertation von Reuter [2] gibt hierfür ein gutes Beispiel, zeigt aber gleichzeitig auch, welche Schwierigkeiten sich einem derartigen Vorgehen entgegenstellen. Nur sehr weitgehende Verallgemeinerungen eröffnen unter solchen Umständen eine gewisse Aussicht auf Erfolg.

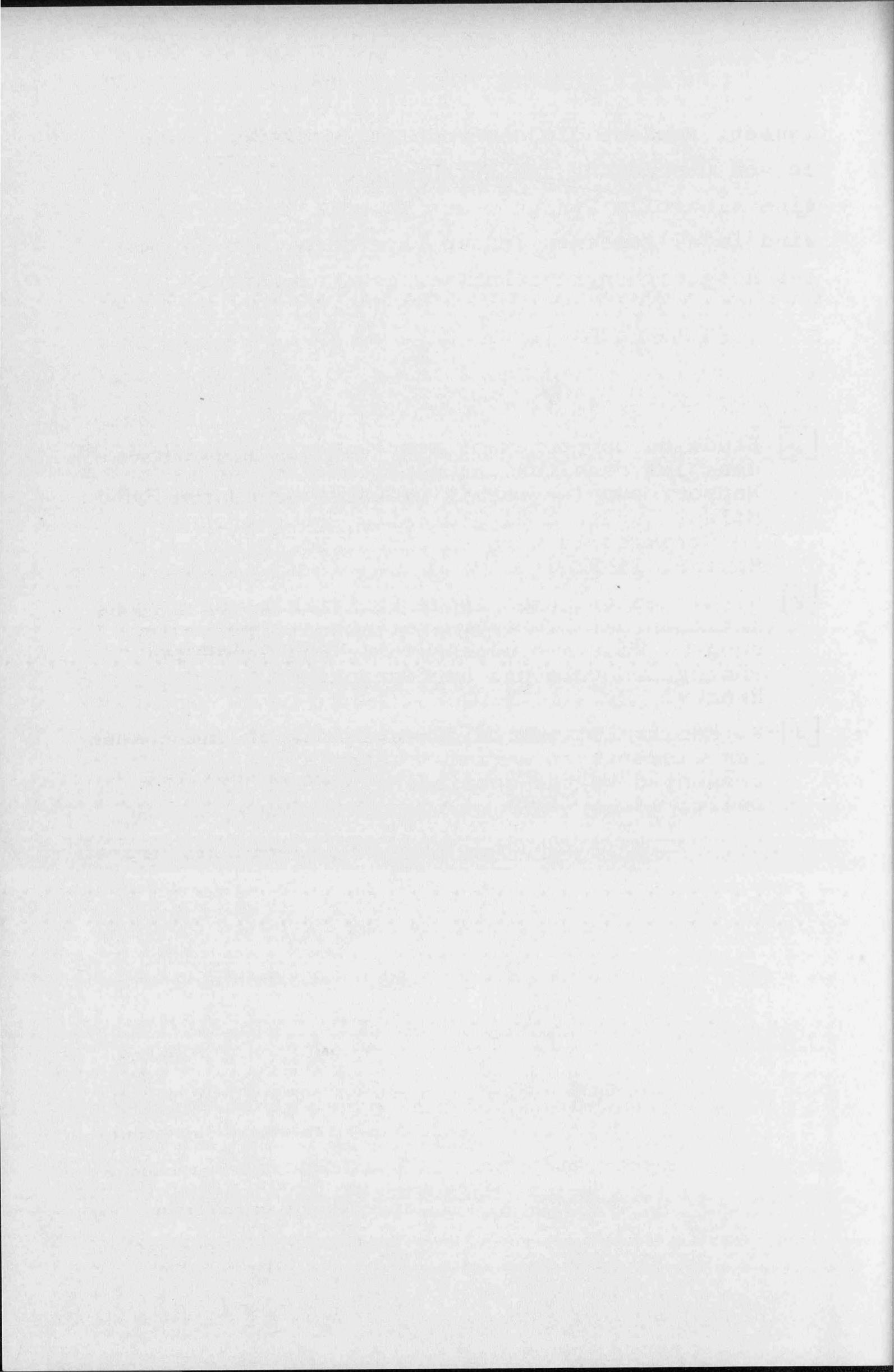
Im übrigen zeigt sich wie bei entsprechenden Versuchen von Kubik [3], daß die Eigenwilligkeit des Zufalls häufig zu völlig unerwarteten Ergebnissen führt, die ohne eine Korrektur durch vernunftgemäße Überlegungen Anlaß zu hoffnungslos verkehrten Schlüssen wären. Erst eine sinnvolle Interpretation der Rechnungen kann zu brauchbaren Ergebnissen führen.

Freilich muß man sich fragen, ob es überhaupt zweckmäßig ist, Messungen auszugleichen, die hochgradig miteinander korreliert sind, oder ob man nicht, ähnlich wie bei der Winkelmessung, anstreben sollte, durch entsprechend gewählte Meßbedingungen Ausgangswerte zu erzielen, die man praktisch als voneinander unabhängig betrachten darf. Daß man heute wegen der Vervollkommnung der Rechenhilfsmittel für beliebige Q-Matrizen Ausgleichungen durchführen kann, sollte an sich nicht dazu führen, von dieser Möglichkeit auch unter allen Umständen Gebrauch zu machen.

Im übrigen zeigen diese Überlegungen, daß sich Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik weder rein spekulativ noch rein empirisch betreiben

lassen, sondern die dauernde gegenseitige Kontrolle von Überlegung und Erfahrung erfordern. Erst eine sinnvolle Synthese aus Theorie und Praxis wird im allgemeinen in der Lage sein, ein optimales Ausgleichungsergebnis zu gewährleisten.

- [1] Etude du comportement des éléments d'orientation dans les restitutions répétées des bandes. Rapport sur les essais exécutés au Centre de Milan. Istituto di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria Gino Cassinis. Politecnico Milano. 1968.
- [2] H.-G. Reuter: Empirische Ermittlung von Korrelationen bei Elektromagnetischen Streckenmessungen. Wiss.Arbeitsstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie a.d.T.U. Hannover Nr.41, 1970.
- [3] K. Kübik: Estimation of variances of the transfer elements in aerial triangulation. Report presented to the Commission A of DEEPE. ITC Delft, 1967.



DAS INSTITUT FÜR HÖHERE GEODÄSIE  
AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE WIEN  
UND SEINE LEHRER

Von F. HAUER, Wien

Ein Ministerialerlaß vom 15. Juni 1852 gab den ersten Anlaß zur Gründung einer Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie am k. k. Polytechnischen Institut in Wien, dem Vorgänger der Technischen Hochschule Wien. In diesem Erlaß wird angeregt, Vorlesungen über Höhere Geodäsie einzuführen. Nach einem Gutachten des Professors für Praktische Geometrie, Friedrich Hartner, vom 28. Juni 1852 unterbreitete dessen Nachfolger Dr. Josef Herr (1819–1884) am 17. September 1857 dem Unterrichtsministerium ein Gesuch, Vorlesungen über Höhere Geodäsie abhalten zu dürfen, das am 22. September 1857 mit ausdrücklicher Verwahrung gegen Anspruch auf Entgelt genehmigt wird.

Zur Feier des fünfzigjährigen Bestandes des k. k. Polytechnischen Institutes im Jahre 1865 wird als dritter Programmpunkt die Errichtung eines Kleinen Observatoriums vorgeschlagen, das der Prüfung der in der mechanischen Werkstätte des Institutes hergestellten astronomischen Instrumente und der Einübung der Hörer in deren Gebrauch dienen soll.

Im Entwurfe des neuen Organisationsstatutes für die k. k. Technische Hochschule Wien vom 18. Juli 1863, das die Errichtung der Fachschulen für Hochbau, Straßen- und Wasserbau, Maschinenbau, Geodäsie, Berg- und Hüttenwesen, Chemie sowie Handel und Staatswirtschaft vorsieht, werden den Hörern der Fachschule Geodäsie die Fächer Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie als Lehrgegenstände empfohlen und als vierzehnte ordentliche Lehrkanzel die Praktische Geometrie, zweiter Kurs; Sphärische

Astronomie und Höhere Geodäsie", genannt. In der endgültigen Organisation der Hochschule, die aus dem Entwurf von 1863, dem Organisationsstatut vom 17. Oktober 1865, dem Gesetz betreffend die Organisation der k. k. Technischen Hochschule in Wien vom 10. April 1872 und dem Organischen Statut vom 20. Februar 1875 hervorgeht, scheinen nur mehr fünf Fachschulen, nämlich der Straßen- und Wasserbau als Ingenieurschule, der Hochbau als Bauschule, der Maschinenbau als Maschinenbauschule, die Technische Chemie als Chemisch-Technische Schule und die Vereinigung jener Fächer, welche in keiner dieser Fachschulen einge-reiht worden sind, als Allgemeine Abteilung auf. Trotzdem wird die Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie mit 17. Oktober 1865 genehmigt und am 23. Juni 1866 Dr. Josef Herr, bisher Professor der Praktischen Geometrie, zu ihrem ersten Professor ernannt.

Das k. k. Polytechnische Institut war die erste Lehranstalt des gesamten deutschen Sprachraumes, an der die Vermessungskun-de seit 1818 als eigenes Fach unterrichtet wurde. Ihr erster Leh-rer, Franz Anton Ritter v. Gerstner, behandelte in seinen Vor-lesungen über Praktische Geometrie auch die Landesaufnahme, die astronomische Ortsbestimmung und die Theorie der Darstel-lung der Land-, See- und Himmelskarten. Auch sein Nachfolger Simon Stampfer, einer der profiliertesten Lehrer der praktischen Geometrie, betreute über seine Lehrverpflichtung hinaus Teilge-biete der Höheren Geodäsie und der Sphärischen Astronomie.

Dr. Josef Herr, der nach philosophischen, juridischen und tech-nischen Studien zunächst als Professor für Höhere Mathematik und Praktische Geometrie am Joaneum, der heutigen Technischen Hochschule, in Graz gelehrt hatte, wurde im Jahre 1858 als

Nachfolger Friedrich Hartners an den Lehrstuhl für Praktische Geometrie in Wien berufen. Er war mit anderen verdienstvollen Professoren Mitglied jener Kommission, die sich über Auftrag des Unterrichtsministeriums um eine Neuorganisation des k. k. Polytechnisches Institutes bemühte und das Organisationsstatut für die neue Technische Hochschule schuf.

Der große Aufschwung aller technischen Disziplinen nach der Revolution von 1848 stellte stark wachsende Ansprüche an die jungen Techniker. Die großen Aufgaben der Landesvermessung, vertieft und erweitert durch grundlegende Arbeiten von Gauß und Bessel, übten ihren Einfluß auf das Gesamtgebiet der Geodäsie aus. Dazu kam noch die über Vorschlag von Generalleutnant Baeyer erfolgte Gründung der "Mitteleuropäischen Gradmessung" im Jahre 1862 und die Gründung der "Österreichischen Gradmessungskommission", der heutigen "Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung" im Jahre 1863. Es ist sicher, daß es Josef Herr war, der unter dem Eindruck dieser Entwicklungen wesentlich zur Schaffung der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie an der Wiener Technischen Hochschule beigetragen hat.

Herr war auch einer der drei erstgenannten "Gradmessungskommissäre". Wiederholt beteiligte er sich an praktischen Arbeiten der Österr. Gradmessungskommission durch Ausführung von astronomischen Ortsbestimmungen. Er war auch an den Vorarbeiten zur Einführung des metrischen Maß- und Gewichtssystems in Österreich beteiligt und neben seiner Hochschultätigkeit erster Direktor der "Österreichischen Normal-Eichungskommission". Neben einem zweibändigen Lehrbuch der Höheren Mathematik verfaßte er das durch lange Zeit sehr geschätzte und bestens be-

währte "Lehrbuch der Sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf die Geographische Ortsbestimmung", das nach seinem Tode im Jahre 1884 von seinem Nachfolger im Lehramte Professor Tinter 1887 vollendet und herausgegeben wurde. Seiner großen Bedeutung wegen erfuhr dieses Werk noch im Jahre 1924 eine Neuauflage.

Im Jahre 1867 begann Herr mit den lehrplanmäßigen Vorlesungen und Übungen über Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie für den zweiten Jahrgang der Bauingenieurschule. Der Durchführung der Übungen diente, nach dem Ausbau des dritten Stockwerkes, der 1867 genehmigt wurde, das über diesem errichtete Observatorium, bestehend aus einem Beobachtungsraum für Beobachtungen im Meridian und im Ersten Vertikal, zwei hölzernen Drehkuppeln für einen Reflektor, für größere Universalinstrumente und Theodolite, sowie einer Plattform mit Pfeilern. Im Jahre 1871 erfolgte die Verlegung beider Vorlesungen in den vierten Jahrgang der Bauingenieurschule; diese Einteilung blieb mit nur geringen Änderungen bis einschließlich des Studienjahres 1901/02. Neben seinen Hauptvorlesungen hielt Herr auch Spezialkollegien zur Theorie der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, zur Kartenentwurfslehre, zur Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme und zum Präzisionsnivelllement.

Professor Herr, der sich um die Technische Hochschule Wien außerordentliche Verdienste erwarb, wurde vom Professorenkollegium für das Studienjahr 1866/67 zum ersten Rektor gewählt.

Ebenso wie Herr war auch sein Nachfolger Wilhelm Tinter v. Marienwil (1839–1912) vorerst Professor für Praktische Geome-

trie am k. k. Polytechnikum. Er war Schüler und Assistent Herrs und vor seiner Berufung an das k. k. Polytechnikum im Jahre 1873 Professor für "Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie" an der Technischen Militärakademie in Wien. Als langjähriger Mitarbeiter von Professor Herr wurde er schon 1872 in die Österreichische Gradmessungskommission gewählt. Im Jahre 1885 übernahm Tinter nach Herr die Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie; zwei Jahre später wurde er als Nachfolger des genialen Astronomen Theodor v. Oppolzer auch zum Präsidenten der "Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung", der Nachfolgeorganisation der Erdmessungskommission, gewählt.

Wilhelm Tinter, der schon als Privatdozent sein besonderes Interesse der Instrumentenkunde und der Beobachtungstechnik zuwandte, führte am Observatorium der Technischen Hochschule astronomische Messungen erster Ordnung durch, die als muster-gültig anerkannt, zum Teil auch in den Denkschriften der Wiener Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurden. Als Meister der Beobachtungskunst verfaßte er zahlreiche einschlägige Artikel in der Zeitschrift des Österr. Ingénieur- und Architektenvereins, deren Schriftleitung er durch viele Jahre besorgte. Ebenso wie Herr war auch Tinter Präsident der Normal-Eichungskommission; auch er hielt über seine Lehrverpflichtung hinaus eine Reihe Spezialvorlesungen über Sondergebiete der Höheren Geodäsie und der Sphärischen Astronomie.

Da sich seit etwa 1890 im technischen Katasterdienst durch die verstärkte Einführung numerischer Aufnahmemethoden ein starker Mangel an qualifizierten Geometern bemerkbar machte, wurde durch Professor Dr. Anton Schell, den Nachfolger Profes-

sor Tinters an der Lehrkanzel für Praktische Geometrie, zur Reformierung des Geodäsieunterrichtes ein Studienplan für einen eigenen zweijährigen Kurs entworfen, der nach ministerieller Genehmigung im Studienjahr 1896/97 an der k. k. Technischen Hochschule Wien eröffnet wurde. Er sah eine abschließende Fachprüfung vor und wurde der allgemeinen Abteilung angeschlossen.

Tinter widmete sich trotz seiner vielseitigen Verpflichtungen mit Intensität dem Lehrberuf und dies besonders seit der Einrichtung des zweijährigen Kurses für Geometer. Während diese die beiden Hauptvorlesungen im zweiten Jahrgang hörten, war für die Bauingenieure ab dem Jahre 1902 nur mehr die Höhere Geodäsie ein vierstündig Pflichtfach im neunten Semester. Das Professorenkollegium zeichnete Professor Tinter durch die Wahl zum Rektor magnificus für das Studienjahr 1884/85 besonders aus.

In den Jahren 1907 bis 1909 hielt Privatdozent Dr. Adalbert Prey, nachmals Universitätsprofessor, zuerst in Innsbruck, sodann in Wien, Vorlesungen über das geometrische und trigonometrische Nivellement, die Bestimmung der Abplattung der Erde aus Schweremessungen, über Lotstörungen und Lotabweichungen sowie über Dreiecksberechnungen auf dem Rotationsellipsoid als Ergänzungen zum Pflichtprogramm für Geometer.

Nach Tinters Emeritierung im Jahre 1910 wandte sich der Vorsitzende des Berufungsausschusses, Professor E. Doležal, an den damals bedeutendsten Fachmann auf dem Gebiete der Erdmessung, Geheimrat Professor Dr. R. Helmert, mit der Bitte um einen Vorschlag für einen würdigen Nachfolger für diese wichtige Lehrkanzel. Helmert empfahl seinen Schüler und langjährigen Mitarbeiter Dr. Richard Schumann (1884–1945), der in Leipzig und Berlin Mathematik, Physik und Astronomie studiert hatte

und schon 1902 über Helmerts Vorschlag als Ordinarius für das Vermessungswesen an die Technische Hochschule Aachen berufen worden war. Seine Ernennung in Wien erfolgte im Jahre 1911.

Schumann beteiligte sich sofort und mit Tatkraft an den im Gange befindlichen Reformbemühungen des Professorenkollegiums zur Entlastung der Lehrpläne. Die Höhere Geodäsie wurde zunächst von vier auf drei Wochenstunden, im Jahre 1912 sodann auf zwei Wochenstunden reduziert und zum besseren Anschluß an die Vorlesungen über Praktische Geometrie vom neunten in das siebente Semester vorverlegt. Als Ersatz für den Ausfall wurde für den Geometerkurs die Vorlesung "Ausgewählte Kapitel aus Höherer Geodäsie" eingerichtet.

Der Umfang der Vorlesungen und Übungen ab 1912 gliederte sich in Höhere Geodäsie für Bauingenieure des vierten und für Geometer des zweiten Jahrganges mit zwei Wochenstunden im Wintersemester über Grundlagen der Triangulation, Anwendung der Kartenprojektion und Abstecken langer Tunnel; ausgewählte Kapitel der Höheren Geodäsie für Geometer mit einer Wochenstunde im Winter über Potential, Geoid, Schweremessung, orthometrische Reduktion und Präzisionsnivelllement; Sphärische Astronomie für Geometer mit vier Wochenstunden im Sommersemester über Astronomische Grundlagen zur Orientierung einer Landkarte, und über Methoden der Messung von Azimut, Zeit, Polhöhe und geographischer Länge; dazu Übungen mit drei Wochenstunden im Winter über wichtige Aufgaben des numerischen Rechnens und der Berechnung sphärischer Koordinaten und an mehreren Tagen bzw. Abenden im Sommer astronomische Beobachtungen an Sonne und Sternen zur Bestimmung von Azimut, Zeit und Polhöhe samt ihrer Berechnung.

Die Einrichtung des Kurses zur Heranbildung von Vermessungsgeometern entsprach schon vom Anfang an nicht den Anforderungen der Zeit und Professor Doležal bemühte sich von 1906 an, das Studium des Vermessungswesens auf acht Semester zu erweitern. Gegen starken Widerstand, hauptsächlich von Seiten der Bauingenieure, und nach langjährigen Anstrengungen gelang es dann doch, das Studium auf sechs Semester zu erweitern. Mit Verordnung des Bundesministeriums für Unterricht vom 6. September 1924 wurde die Abteilung für Vermessungswesen als vollakademisches Studium mit zwei Staatsprüfungen eingerichtet.

Ab dieser Zeit übernahm Schumann freiwillig eine zweistündige Vorlesung über mathematische Kartographie. Er richtete zwei gut temperierte Keller für Maßstabsvergleiche, Pendelmessungen und Libellenuntersuchungen sowie ein historisch interessantes "Metronomisches Kabinett" ein. Besondere Sorgfalt widmete er dem Zeitdienst des Observatoriums mit seinen sechs astronomischen Pendeluhren. Die Benützbarkeit des Observatoriums war jedoch durch das ständige Wachstum der Großstadt stark beeinträchtigt. Es wurden daher die drehbaren Kuppeln abgetragen und der Starkesche Refraktor an die Universitätssternwarte abgetreten. Weil die Azimutmessungen durch die ringsum entstehenden höheren Bauten stark behindert waren, erwirkte Schumann im Jahre 1928 die Errichtung eines 13 Meter hohen Betonturmes über dem Meßplateau des Observatoriums, der auch der Landestriangulierung gute Dienste leistete.

Schumann, schon im Jahre 1912 zum Mitglied der Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung gewählt, wurde 1914 mit der Oberleitung des Gradmessungsbüros betraut, das zur Beschleunigung der Gradmessungsarbeiten mit Anfang des Jahres 1874 der Gradmessungskommission beigegeben worden war. Er

leitete dieses Büro bis 1921, dem Jahre seiner Eingliederung in das neugeschaffene Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen. Schumanns Tätigkeit als Leiter des Gradmessungsbüros sind eine große Anzahl gediegene Arbeiten zu danken, deren wichtigste die Berechnung des "Meridianbogens Großenhain - Kremsmünster - Pola" ist, die Schumann mit seinem Nachfolger im Lehramte Dr. Friedrich Hopfner gemeinsam durchführte.

Das hohe Ansehen, das Schumann im Professorenkollegium der Technischen Hochschule genoß, geht auch daraus hervor, daß er für das Studienjahr 1914/15, also schon drei Jahre nach seiner Berufung, zum Rektor gewählt wurde. An die hundert wissenschaftliche Arbeiten beschäftigten sich hauptsächlich mit seinen Erdmessungsarbeiten, seinen Schweremessungen im Wiener Becken und seinen umfangreichen Untersuchungen zur Polhöhen-schwankung.

Nach Schumanns Übertritt in den Ruhestand im Jahre 1934 wurde am 1. März 1936 Dr. Friedrich Hopfner (1881-1949), w. Hofrat und Vorstand der wissenschaftlichen Abteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, an die Lehrkanzel berufen. Er hatte in Prag und München Astronomie, Geophysik und Meterologie studiert und war als ehemaliger Mitarbeiter des Gradmessungsbüros und seit 1921 als Leiter der genannten Abteilung mit allen Problemen der Höheren Geodäsie bestens vertraut. Seine hohe wissenschaftliche Begabung befähigte ihn, das Niveau des Unterrichtes wesentlich zu heben und damit das Ansehen des Institutes weiter zu steigern. Noch mit dem Aufbau seiner Vorlesungen befaßt, wurde er im Frühjahr 1938 vom Dienste enthoben und vorzeitig in den Ruhestand versetzt.

Von der Pensionierung Hopfners bis zur Wiedererlangung der

Selbständigkeit Österreichs supplierte der Verfasser dieses Beitrages, Schüler und Assistent von Schumann und Hopfner, im Jahre 1940 habilitiert aus Landesvermessung und Kartenentwurfslehre, sämtliche Gegenstände der Lehrkanzel, da der im Jahre 1940 aus Aachen berufene Professor Dr. Berroth sein Lehramt in Wien nie angetreten hat und der nach seinem Rücktritt im Jahre 1944 ernannte damalige Oberregierungsrat Dr. Karl Ledersteger von seiner fachlichen Tätigkeit bei der Kriegsvermessung nicht freigestellt wurde.

Von seiner Rückberufung im Sommer 1945 bis zu seinem Tode bei einem Bootsunglück auf dem Hintersteinersee am 5. September 1949 bemühte sich Hopfner in schwierigster Zeit um das in den Nachkriegswirren stark beschädigte Institut und vor allem um einen weiteren Ausbau des Geodäsieunterrichtes auf acht Semester, der als Folge einer Erweiterung während der Kriegsjahre auf nunmehr sieben Semester eine Ausweitung der Vorlesungen aus dem mathematischen und physikalischen Teil der Höheren Geodäsie auf je vier Wochenstunden ermöglichte, wobei er die physikalische Geodäsie mit besonderer Liebe auf der potential-theoretischen Grundlage aufbaute und die Kartenentwurfslehre nach der umfassenden und klaren Theorie Tissots vortrug.

Hopfner zählte zu den angesehensten und geachtetsten Kollegiumsmitgliedern. Seine Wahl zum Rektor des Studienjahres 1948/49 erfolgte – wenn man den Stimmzettel, der von ihm selbst stammte, außer acht lässt – mit allen Stimmen des Professorenkollegiums. Außer den vier selbständigen Werken in Buchform: Der Meridianbogen Großenhain – Kremsmünster – Pola, 1921 gemeinsam mit R. Schumann; Die Figur der Erde, 1927; Physikalische Geodäsie, 1933, und Grundlagen der Höheren Geodäsie, 1949,

sowie der Mitarbeit an sechs Sammelwerken veröffentlichte er über achtzig wissenschaftliche Arbeiten über geodätische, geophysikalische und astronomische Themen. Sein Stil war ebenso klar und prägnant wie seine temperamentvollen und stets auf hohem Niveau gehaltenen Vorlesungen. Durch viele Jahre leitete er als ihr Präsident die Geschicke der Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung. Seine wissenschaftlichen Verdienste wurden vielfach ausgezeichnet, unter anderem auch durch die Wahl zum wirklichen Mitglied der Österr. Akademie der Wissenschaften.

Nach dem tragischen Tode Hopfners supplierte wiederum der Verfasser dieser Zeilen bis zu seiner Ernennung zum o. Professor und Vorstand des Institutes für Allgemeine Geodäsie sämtliche Gegenstände der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie. Mit Beginn des Sommersemesters 1950 erfolgte eine Aufteilung der Lehrfächer: Die "Einführung in das geodätische Rechnen" wurde weiterhin durch den Verfasser unterrichtet, Kartenentwurfslehre und Sphärische Astronomie durch den Oberrat des Vermessungsdienstes Dr. Karl Ledersteger und Höhere Geodäsie durch den Nachfolger Hofrat Hopfners in der wissenschaftlichen Abteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen Hofrat tit. a.o. Professor Dr. Karl Mader. Er war von 1920 bis 1926 Assistent bei Schumann gewesen und anschließend in den Bundesvermessungsdienst eingetreten. Im Jahre 1934 habilitierte er sich als Privatdozent für "Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie" an der Technischen Hochschule Wien und hielt als solcher Vorlesungen über "Einführung in die physikalische Geodäsie" und "Praktische Geophysik". Ab 1946 hatte er vorübergehend einen Lehrauftrag für eine zweistündige Vorlesung "Methode der kleinsten Quadrate" und bis zur Neubesetzung des Institutes einen

Lehrauftrag für "Angewandte Geophysik I und II", je zweistündig im sechsten und siebenten Semester des Vermessungsstudiums.

Mit 19. September 1957 wurde Dr. Karl Ledersteger neuerlich zum o. Professor und Vorstand des Institutes für Höhere Geodäsie ernannt, wobei die Angewandte Geophysik in seine Lehrverpflichtung einbezogen worden ist. Da die Würdigung seiner Persönlichkeit, seines äußerst fruchtbaren Gelehrtenlebens und seiner wissenschaftlichen Leistungen bereits im ersten Artikel dieser Festschrift erfolgt ist, sei es gestattet, diese Zeilen im wesentlichen auf seine Tätigkeit als o. Professor und Vorstand des Institutes für Höhere Geodäsie auszurichten.

Als Doktor der Philosophie, nach Studien der Mathematik, Physik, Astronomie und Höheren Geodäsie, war Ledersteger von 1926–1931 Assistent bei Professor Schumann. Nach dem zweiten Weltkriege aus amerikanischer Gefangenschaft zurückgekehrt und wieder beim Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen tätig, wurde er als Nachfolger Maders mit Beginn 1966 zum Leiter der Abteilung "Erdmessung" bestellt. Mit geodätischen und astronomischen Instrumenten aus jahrzehntelanger Praxis bestens vertraut, setzte er sich nach seiner Berufung mit Energie für eine Erneuerung des veralteten Instrumentariums und den Ausbau des Institutes ein. Neben der Erneuerung des Hörsaales und des Professorenzimmers wurde beim Institutsumbau ein Bibliotheksräum und ein Verhandlungszimmer für die Sitzungen der "Österr. Kommission für die Internationale Erdmessung" geschaffen. An Stelle des veralteten Meridianzimmers wurde ein Observatorenzimmer eingerichtet und die Beobachtungsterrasse ausgebaut. An größeren Instrumenten konnten eine Kleinquarzuhr von Rhode u. Schwarz, ein Askania-Gravimeter mit automatischer Registrie-

rung, ein Askania-Passagenrohr, ein Zeiss-Astrolabium und ein elektrischer Chronometer mit einem Zeitimpulsgeber und einem Bandchronographen angeschafft worden.

Professor Ledersteger hat die Vorlesungen aus Sphärischer Astronomie und besonders aus Physikalischer Geodäsie den neuen wissenschaftlichen Entwicklungen angepaßt. In der Geophysik, die auf zwei Wochenstunden im Wintersemester beschränkt wurde, werden in erster Linie die notwendigen Ergänzungen zur physikalischen Geodäsie gelehrt. Seit dem Sommersemester 1962 hält er eine zweistündige Vorlesung über "Satellitengeodäsie", womit auch einer der jüngsten Zweige der Geodäsie im Vermessungsstudium vertreten ist.

Sein langjähriger Assistent Dipl. Ing. Dr. Wilhelm Embacher, seit 1969 o. Professor für Geodäsie an der Universität Innsbruck, hat von seiner Habilitierung im Jahre 1955 bis zu seiner Berufung nach Innsbruck eine eineinhalbstündige Vorlesung über "Luftnavigation" und eine zweistündige Vorlesung über "Moderne Methoden der geographischen Ortsbestimmung" gehalten.

Im Zuge der an der Technischen Hochschule Wien laufenden Studienreform, die mit Beginn des Wintersemesters 1971/72 in Kraft treten wird, sind für die Ausbildung der Studierenden des Vermessungswesens zunächst sechs Ordinariate vorgesehen. Von ihnen bestehen derzeit vier: Allgemeine Geodäsie, Photogrammetrie, Landes- und Katastervermessung sowie Höhere Geodäsie. In Besetzung stehen zwei: Geophysik sowie Kartographie und Reproduktionstechnik. Während der Besetzungsausschuß für Kartographie und Reproduktionstechnik erst seine – in den derzeitigen Verhältnissen immer – schwierige Aufgabe begonnen hat, stehen die Verhandlungen zur Ernennung eines namhaften Geo-

physikers unmittelbar vor dem Abschluß.

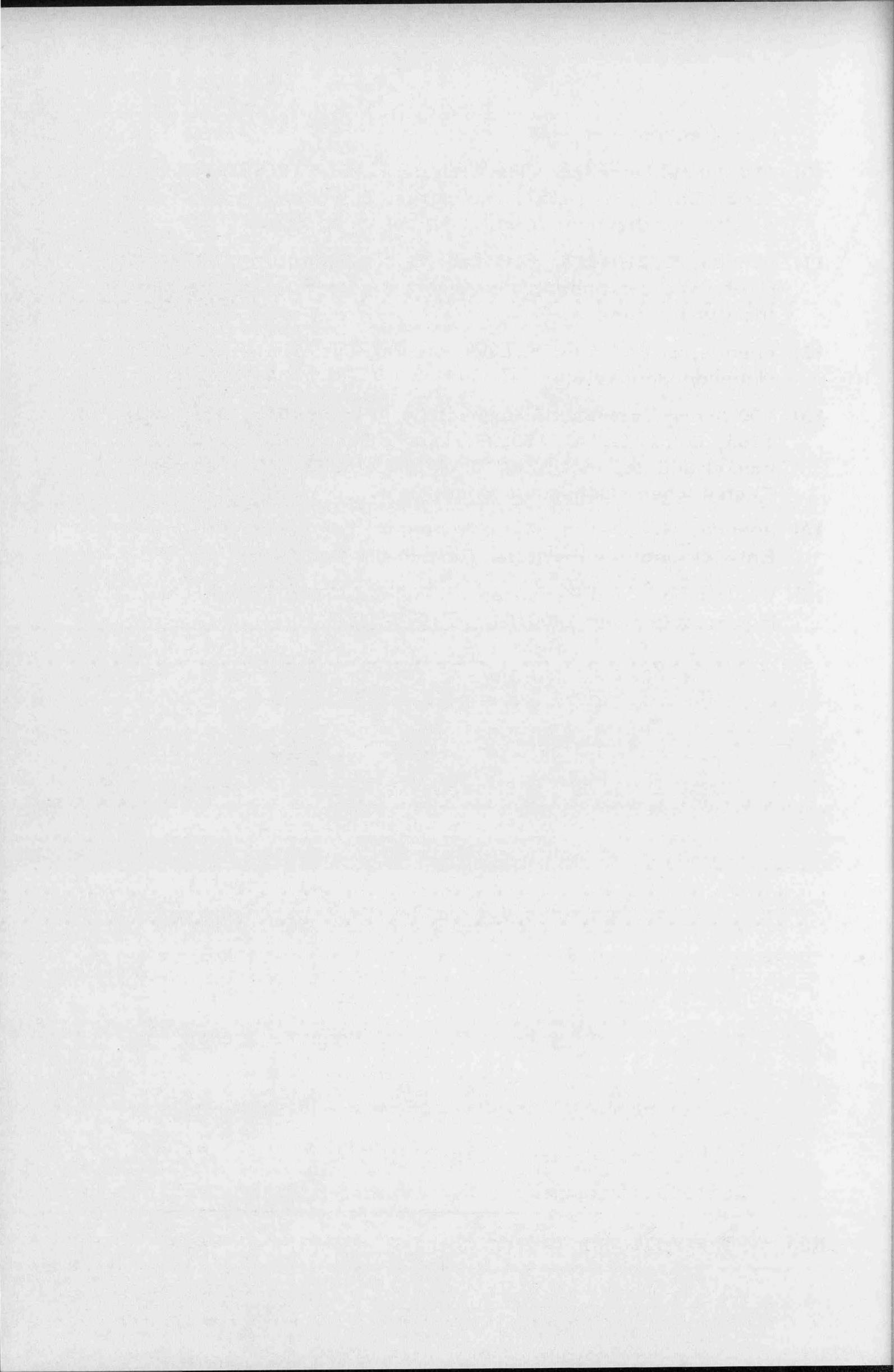
Die Nachbesetzung des Institutes für Höhere Geodäsie nach der Emeritierung von Professor Ledersteger stellt den Besetzungs-ausschuß vor ein besonders schweres Problem, gilt es doch, einen Nachfolger zu finden, dessen Leistungen und Persönlich-keit sich der Reihe der prominenten und weltweit anerkannten Lehrer und Forscher, die bisher den hohen Ruf dieses Institu-tes getragen haben, würdig anzuschließen.

### Literatur

- 1) Die k.k. Technische Hochschule in Wien 1815–1915, Wien 1915, S. 222–342, J. Neuwirth, Die Ausgestaltung des Poly-technischen Institutes nach Prechtl zur Technischen Hoch-schule;
- 2) ebenda, S. 362–375, E. Doležal, Die Lehrkanzeln und Sammlungen für praktische Geometrie und geodätisches Zeichnen und Technik des Katasterwesens;
- 3) ebenda, S. 375–378, R. Schumann, Die Lehrkanzel für höhe-re Geodäsie und sphärische Astronomie und ihre Sammlung;
- 4) ÖZfVerm, Baden bei Wien 1934, S. 21–37, E. Doležal, Hof-rat Dr. phil. et Dr. –Ing. e. h. Richard Schumann, Ein Lebens-bild;
- 5) ÖZfVerm, Baden bei Wien 1949, S. 74–80, H. Rohrer, Hof-rat o. ö. Professor Dr. phil. Friedrich Hopfner +;
- 6) Österr. Bauzeitschrift, Wien 1949, S. 184, F. Hauer, Hof-rat Professor Dr. Friedrich Hopfner zum Gedächtnis;
- 7) ÖZfVerm, Baden bei Wien 1956, S. 177–182, K. Lego, Die Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie an der Technischen Hochschule in Wien und ihre Beziehun-gen zur Erdmessung;
- 8) ÖZfVerm, Baden bei Wien 1960, S. 171–173, J. Mitter, Wirklicher Hofrat a. o. Professcr Dr. phil. Karl Mader – 70 Jahre;
- 9) ebenda, S. 202–204, H. Rohrer, Prof. Dr. phil. Dr. techn. e. h.

Karl Ledersteger - 60 Jahre;

- 10) 150 Jahre Technische Hochschule in Wien 1815-1965, Wien 1965, Bd. 1, S. 11-157, R. Wurzer, Die Stellung der Technischen Hochschule Wien im Ablauf ihrer Geschichte;
- 11) ebenda, S. 210-213, F. Hauer, Simon Stampfer, 1825-1848 Professor der praktischen Geometrie am Polytechnischen Institut in Wien;
- 12) ebenda, S. 347-354, K. Ledersteger, Die Wiener Schule der Höheren Geodäsie;
- 13) 150 Jahre Technische Hochschule in Wien 1815-1965, Wien 1965, Bd. 2, S. 141-150, F. Hauer, Geschichte der Lehrkanzel und des Institutes für Allgemeine Geodäsie an der Technischen Hochschule Wien;
- 14) ebenda, S. 153-158, K. Ledersteger, Die geschichtliche Entwicklung des Institutes für Höhere Geodäsie;
- 15) Vorlesungs- und Personalverzeichnisse der Technischen Hochschule Wien 1900/01 bis 1970/71.



Die methodische Auswahl unabhängiger Bedingungsgleichungen komplizierter Triangulationsnetze

von Prof.Dr.I. Hazay, Budapest

Auch die Triangulationsnetze größerer Ausdehnung sind meistens aus Grundformationen /zentralen, diagonalen Figuren/ mit einer solchen Systematik zusammengesetzt, daß die Auswahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen im allgemeinen einfach ist. Hat aber das Netz - selbst ein kleineres - eine zusammengesetzte Formation, d.h. es enthält viele Diagonalen, so erfordert die Auswahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen bereits eine große Aufmerksamkeit, sowie Systematik. Die Stations-, die Winkelsummen- und Seitengleichungen sowie die Zahl ihrer Summe können aus bekannten Formeln berechnet werden. Ist die Zahl sämtlicher Punkte des Netzes  $p$ , die Zahl der Standpunkte  $p_1$ , die Zahl der Seiten  $s$ , die Zahl der von beiden Endpunkten angezielten Seiten  $s_1$  und die Zahl der gemessenen Winkel  $w$ , so sind im an Abb. 1. dargestellten Netz  $p = 7$ ;  $p_1 = 7$ ;  $s = 17$ ;  $s_1 = 17$  und  $w = 28$ . Dementsprechend beträgt die Zahl der unabhängigen

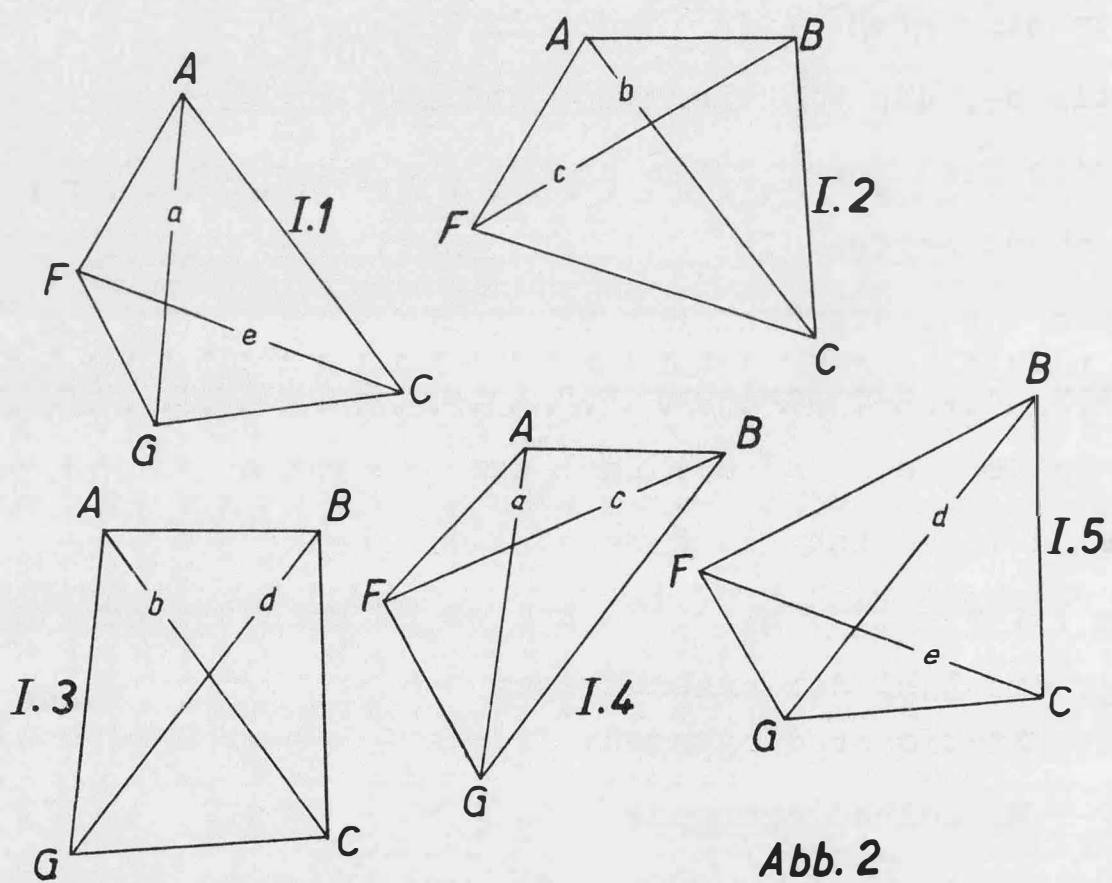
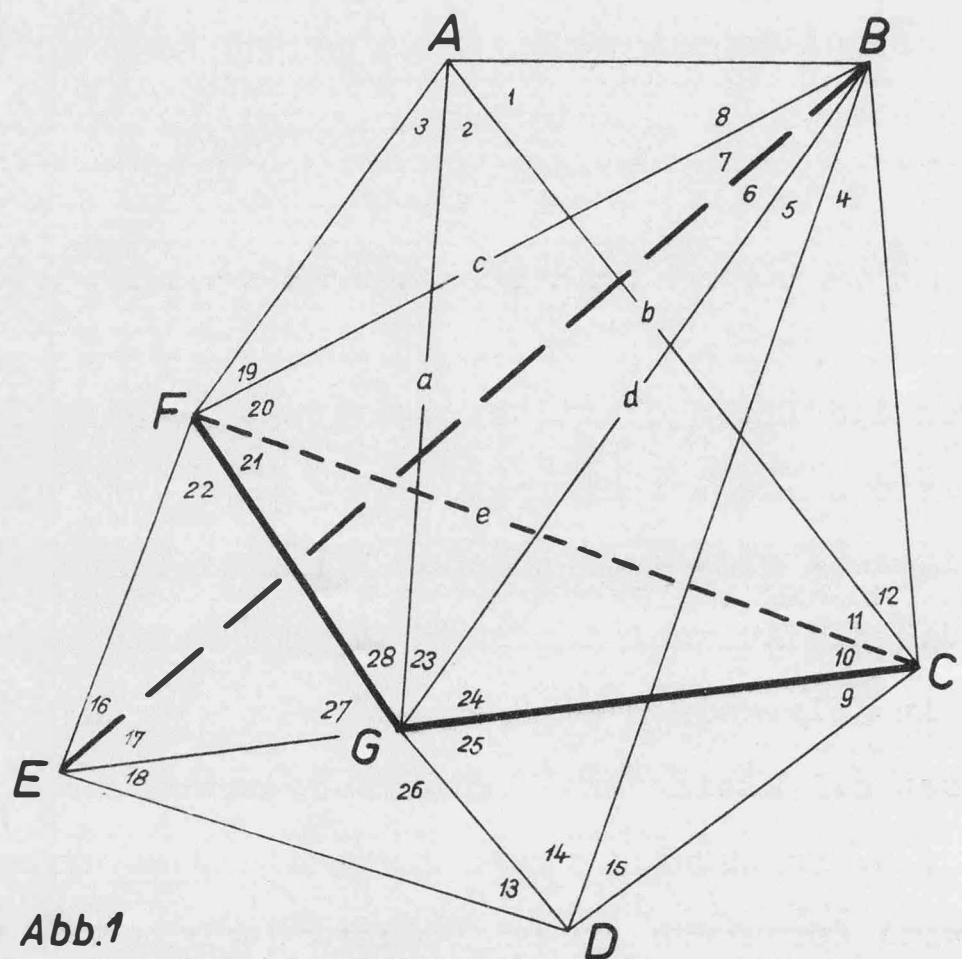
$$\text{Stationsbedingungen: } f_1 = w - s - s_1 + p_1 = 1$$

$$\text{Winkelbedingungen: } f_2 = s_1 - p_1 + 1 = 11$$

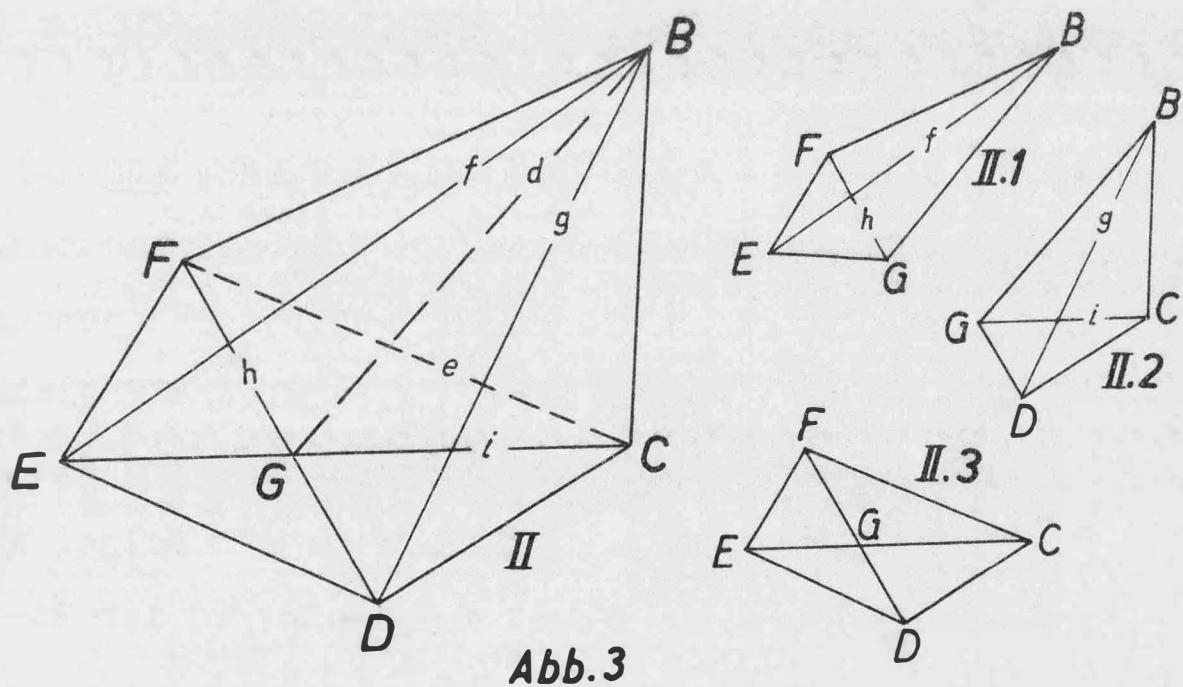
$$\text{Seitenbedingungen: } f_3 = s - 2p + 3 = 6$$

---


$$\text{die Zahl sämtlicher Bedingungen: } f = w - 2p + 4 = 18.$$



Drei- eck	Winkelsummengleichung in der Formation			
	I	II	III	IV
ABC ABF ABG ACF ACG AFG	4 F F 1 3 F			
BCD BCF BCG BDE BDG BEF BEG BFG		7 (6) F F F		
CDG CFG DEG EFG	2	8 10		{8} {2} (10) (F)



Die Stationsbedingung kann auch durch Betrachtung bestimmt werden. Der Horizont wurde hier nur in Punkt G durchgemessen. Es entsteht also hier nur eine Stationsgleichung.

Zur Auswahl der unabhängigen Winkelgleichungen teilen wir das Netz in solche Formationen, in welchen die die Winkelbedingung liefernden Figuren übersichtlich sind. Die Formation I besteht aus dem durch die Eckpunkte A , B , C , G und F bestimmten Teil des an Abb.1. dargestellten Netzes. Der Teilungsstrich wurde mit einer dicken fortlaufenden Linie markiert. Die diese schneidenden Diagonalen müssen außer Acht gelassen werden. An Abb. 2. wurden aus dieser Formation jene einfachen Figuren ausgewählt, die bereits zur Auswahl der Winkelbedingungen der Formation I geeignet sind.

Werden aus der Figur I.1. z.B. die Dreiecke ACF , CFG und ACG ausgewählt, so ist die Winkelbedingung als deren Folge auch im Dreieck AFG bereits gesichert; dies würde also keine unabhängige Bedingung mehr liefern. Es seien aus der Figur I.2. die Dreiecke ABC und BCF ausgewählt. ACF wurde bereits in I.1. aufgenommen. Die Winkelbedingung des Dreiecks ABF ergibt sich demnach schon als Folge. Wird in der Figur I.3. noch die Winkelbedingung des Dreiecks BCG aufgenommen, so wird die Winkelbedingung des Dreiecks ABG bereits zur Folge. Aufgrund der früheren Annahme bzw. Folgen ist in der Fi-

gur I.4. die Winkelbedingung des Dreiecks BFG schon eine Folge. Sämtliche Dreiecke der Figur I.5. erscheinen bereits in den früheren Figuren. Aus der Formation I wurden also 6 unabhängige Winkelbedingungen liefernde Dreiecke ausgewählt, wodurch die Winkelbedingung für sämtliche geschlossene Figuren der Formation I gesichert wurde.

In der Tabelle wurden sämtliche Dreiecke des Netzes /alle sind geschlossene Dreiecke/ angeführt, und es werden einstweilen auf die Formation I bezogen die Reihezahlen der Winkelgleichungen zu jenen Dreiecken, die zum Anschreiben der Winkelgleichung ausgewählt wurden, eingeführt. Zu jenen Dreiecken, deren Winkelbedingung sich als Folge ergibt, wurde der Buchstabe F geschrieben.

Die Formation II ist in Abb. 1. mit den Eckpunkten B, C, D und E gegeben. Die Trennlinie wurde durch lange Strichlinien gekennzeichnet. Die dies schneidenden Diagonalen müssen außer Acht gelassen werden.

In der Figur BCDG ist das Dreieck BCG bereits aus der Formation I gegeben. Es sollen dazu noch die Dreiecke BCD und CDG gewählt werden. Die Folge davon ist die Winkelbedingung des Dreiecks BDG. Aus den weiteren Teil der Formation II sollen die Winkelbedingungen der Dreiecke BEG und DEG angeschrieben werden.

In die zur Formation II gehörige Spalte der Tabelle sind /in Klammern/ die Reihezahlen der aus der Formation I übernommenen Bedingungen und die Reihezahlen der neuen Bedingungen angeschrieben; die Folgen seien auch hier mit F gekennzeichnet.

Die Formation III besteht aus dem durch die Eckpunkte B , G , E , F bestimmten diagonalen Viereck des Netzes der Abb. 1 . Die aus dem vorherigen übernommenen, die neu aufgenommenen und die sich als Folge ergebenden Winkelbedingungen können bereits aus der zur Formation III gehörigen Spalte der Tabelle entnommen werden. /Es ergab sich eine neue Bedingung./

Zu sämtlichen geschlossenen Dreiecken der mit den Eckpunkten C , D , E und F bestimmten Formation IV des Netzes /deren Trennlinien mit kurzer Strichierung gekennzeichnet wurde/ gelangen wir bereits aufgrund der vorherigen /siehe die zur Formation IV gehörige Spalte der Tabelle/. Anhand der Tabelle kann festgestellt werden, daß den Erfordernissen entsprechend  $f_2 = 11$  Winkelsummengleichungen entstehen.

Es muß noch geprüft werden, ob auch jenes Erfordernis erfüllt wird, daß in den aufgeschriebenen Winkelsummengleichungen sämtliche Winkel aller geschlossenen Figuren /bzw. deren jede hin- und zurückgemessene Richtung/ mindestens einmal vorkommt. In unserem Beispiel wur-

de auch dies durchgeführt.

Zur Auswahl der Seitengleichungen soll das Netz in zwei gut übersichtliche Formationen geteilt werden. Die Formation I sei dieselbe, die schon vorher verwendet wurde. In der Formation beträgt die Zahl der unabhängigen Seitengleichungen nach der schon aufgeschriebenen Formel:  $f_3 = 3$ . Werden aus Abb. 2 die Seitenbedingungen der Figuren I.1., I.2. und I.5. ausgewählt, so sind die Seitenbedingungen der Figuren I.3. und I.4. bereits gesichert. Die ausgewählten Figuren enthalten sämtliche Diagonalen der Formation I.

Die Formation II wurde in Abb. 3. dargestellt. In dieser ist  $f_3 = 4$ . Die Seitenbedingung der Figur BCGF, deren mit d und e bezeichneten Diagonalen in Abb. 3. gestrichelt sind, wurde schon in der Formation I aufgeschrieben. Die weiteren drei unabhängigen Seitenbedingungen liefern die Figuren II.1., II.2. und II.3. Mit der Auswahl der ersten beiden wurden sämtliche Diagonalen des Netzes bereits verwendet. Die Figur II.3. ist ein Zentralsystem.

Zuletzt sei noch bemerkt, daß auch die Figur ABCDEF /Abb. 1./ mit dem Punkt G als Zentrum eine Seitenbedingung gehen könnte; doch wäre diese nicht mehr unabhängig, da sie eine Folge der Seitenbedingungen der Figuren I.4., I.5. und II.3. ist.

Es wurden so auch die 6 unabhängige Seitengleichungen ausgewählt und dadurch wurden die 18 unabhängige Bedingungsgleichungen des Netzes aufgestellt.

## DIE GEOPOTENTIELLEN KOTEN UND NORMALHÖHEN

R. A. Hirvonen, Helsinki

### Zusammenfassung.

Die geschlossenen Formeln der gravimetrischen Geodäsie dienen als eine strenge Grundlage für die theoretische Behandlung der Beobachtungen; für die numerischen Berechnungen sind sie aber weniger geeignet. Hier ist nur eine Aufgabe gelöst: auf Grund des Nivellements und der Schwerebestimmungen sind die geopotentiellen Koten bekannt und die Normalhöhen sollten berechnet werden. Die geschlossenen Formeln geben zunächst die geopotentiellen Koten, wenn die Normalhöhen bekannt sind. Unsere umgekehrte Aufgabe kann aber viel schneller und mit kleinen Rechenmaschinen sogar genauer durch Reihenentwicklungen gelöst werden.

### Koordinatensysteme.

Für die geometrischen Vermessungen führen wir das System der geodätischen Koordinaten ein:

$\phi$  geodätische Breite

$h$  geodätische Höhe

Für die gravimetrische Theorie brauchen wir die elliptischen Koordinaten

$\beta$  reduzierte Breite

$\epsilon$  Ekzentrizitätswinkel

Den Zusammenhang zwischen diesen Systemen bilden die geschlossenen Formeln

$$(N + h) \cos \phi = \frac{ae}{\sin \epsilon} \cos \beta$$

$$(N + h - e^2 N) \sin \phi = \frac{ae}{\tan \epsilon} \sin \beta, \text{ wobei}$$

$$N = a/w$$

$$w^2 = 1 - e^2 \sin^2 \phi$$

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$$

Für die praktische Berechnung der elliptischen Koordinaten auf Grund der bekannten geodätischen Koordinaten gibt die folgende Kombination von den geschlossenen Formeln und Reihenentwicklungen eine für alle Fälle ausreichende Genauigkeit, ohne dass eine Anzahl von Überschüssigen Dezimalstellen notwendig wäre:

$$D = \frac{e' h}{N + h}$$

$$\epsilon_0 = \arcsin e = \arctan e'$$

$$\tan \beta_0 = \frac{b}{a} \tan \phi$$

$$\sin(\epsilon_0 - \epsilon) = D - \frac{1}{2} D^2 (e' \cos^2 \phi + D \sin^2 \phi)$$

$$\tan(\beta - \beta_0) = \frac{a}{2b} D^2 \sin \phi \cos \phi$$

### Normalschwere.

Das Sphäeropotential, d.h. das Potential des Referenzellipsoids, kann mit Hilfe von den elliptischen Koordinaten in geschlossener Form ausgedrückt werden:

$$U = \frac{kM}{ae} \epsilon + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \left[ \left( \frac{e}{\sin \epsilon} \right)^2 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right] \cos^2 \beta$$

wobei

$$\Omega = \epsilon - \frac{3}{\tan \epsilon} \left( 1 - \frac{\epsilon}{\tan \epsilon} \right)$$

$\Omega_0$  ist der Wert von  $\Omega$  für  $\epsilon = \epsilon_0$  bzw.  $\tan \epsilon = e'$ .

Für Berechnung mit kleinen Rechenmaschinen muss der geschlossene Ausdruck von  $\Omega$  jedenfalls durch eine Reihenentwicklung ersetzt werden, z.B. durch

$$\Omega_0 = 4 \left( \frac{1}{15} e'^3 - \frac{2}{35} e'^5 + \frac{1}{21} e'^7 - \frac{4}{99} e'^9 + \frac{5}{143} e'^{11} \right)$$

Von obigem Ausdruck des Sphäropotentials kann man die bekannten geschlossenen Formeln der Normalschwere herleiten.

Die Schwereanomalie, die der "Freiluftanomalie" der klassischen Geodäsie entspricht, ist der Unterschied

die beobachtete Schwere  $g$  am Punkt P  
minus die Normalschwere  $\gamma$  am Punkt Q

Der Punkt Q befindet sich auf derselben Ellipsoidennormale wie P und das Sphäropotential  $U$  hat am Punkt Q denselben Wert wie das beobachtbare Potential  $v$  am Punkt P. Wir müssen voraussetzen, dass das Sphäropotential auf der Oberfläche des Referenzellipsoids denselben konstanten Wert wie das beobachtbare Potential auf dem Meeresspiegel (Geoid) hat. Dieser Wert muss also sein

$$u_0 = v_0 = \frac{KM}{ae} \epsilon_0 + \frac{1}{3} \omega^2 a^2$$

Die geopotentielle Kote

$$u = v_0 - v_P = u_0 - u_Q$$

kann auf Grund des Nivellements und der Schwerebestimmungen berechnet werden:

$$u = \int_0^h g \, dh$$

wobei der Nivellementslinie entlang integriert wird.

### Normalhöhe.

Die Höhe des Punktes P über dem Meeresspiegel ist die orthometrische Höhe. Die Höhe des Punktes Q über dem Referenzellipsoid ist die Normalhöhe des Punktes P. Diese beiden Höhen unterscheiden sich nur wenig voneinander. Die erstere ist die Höhe, die für die meisten praktischen Anwendungen, z.B. für Karten natürlicher ist, die letztere ist aber die einzige Höhe, die theoretisch genau definiert und praktisch bestimmt werden könnte. Wenn auch die Berechnung der geopotentiellen Koten von Normalhöhen, wie wir gesehen haben, sogar mit den geschlossenen Formeln ausgeführt werden könnte, ist die umgekehrte Aufgabe, Berechnung der Normalhöhen von geopotentiellen Koten aus, schon recht um-

ständlich. Darum möchte ich die folgende Kombination der geschlossenen Formeln und Reihenentwicklungen vorschlagen.

Zuerst berechnet man den Wert der Normalschwere  $\gamma_0$  auf der Oberfläche des Referenzellipsoids für die geodätische Breite  $\phi$ :

$$\gamma_0 = A/w - Bw$$

$$w^2 = 1 - e^2 \sin^2 \phi$$

$A$  und  $B$  sind Konstanten, für die verschiedene Rechenformeln gegeben werden könnten, z.B.

$$B = (\frac{b}{a}\gamma_b - \gamma_a)/e^2$$

$$A = \gamma_a - B$$

wobei  $\gamma_a$  die Normalschwere auf dem Äquator und  $\gamma_b$  die Normalschwere auf dem Pol des Referenzellipsoids bedeuten.

Die eigentliche Reihenentwicklung für die Normalhöhe besteht aus

$$h = n + n^2(C - D \sin^2 \phi + E \sin^4 \phi) + n^3(F - G \sin^2 \phi) + n^4H$$

wobei

$$n = u/\gamma_0$$

Für die Konstanten haben wir die folgenden Formeln:

$$C = (1 + m + \frac{3}{2}m^2 - \frac{1}{2}me^2 + \frac{1}{8}e^4)/b$$

$$D = (e + \frac{1}{4}e^4 + \frac{5}{2}m^2 - \frac{1}{2}me^2)/b$$

$$E = \frac{1}{8}e^4/b$$

$$F = (1 + \frac{25}{6}m - \frac{1}{6}e^2)/b^2$$

$$G = (\frac{5}{2}m + \frac{3}{2}e^2)/b^2$$

$$H = 1/b^3$$

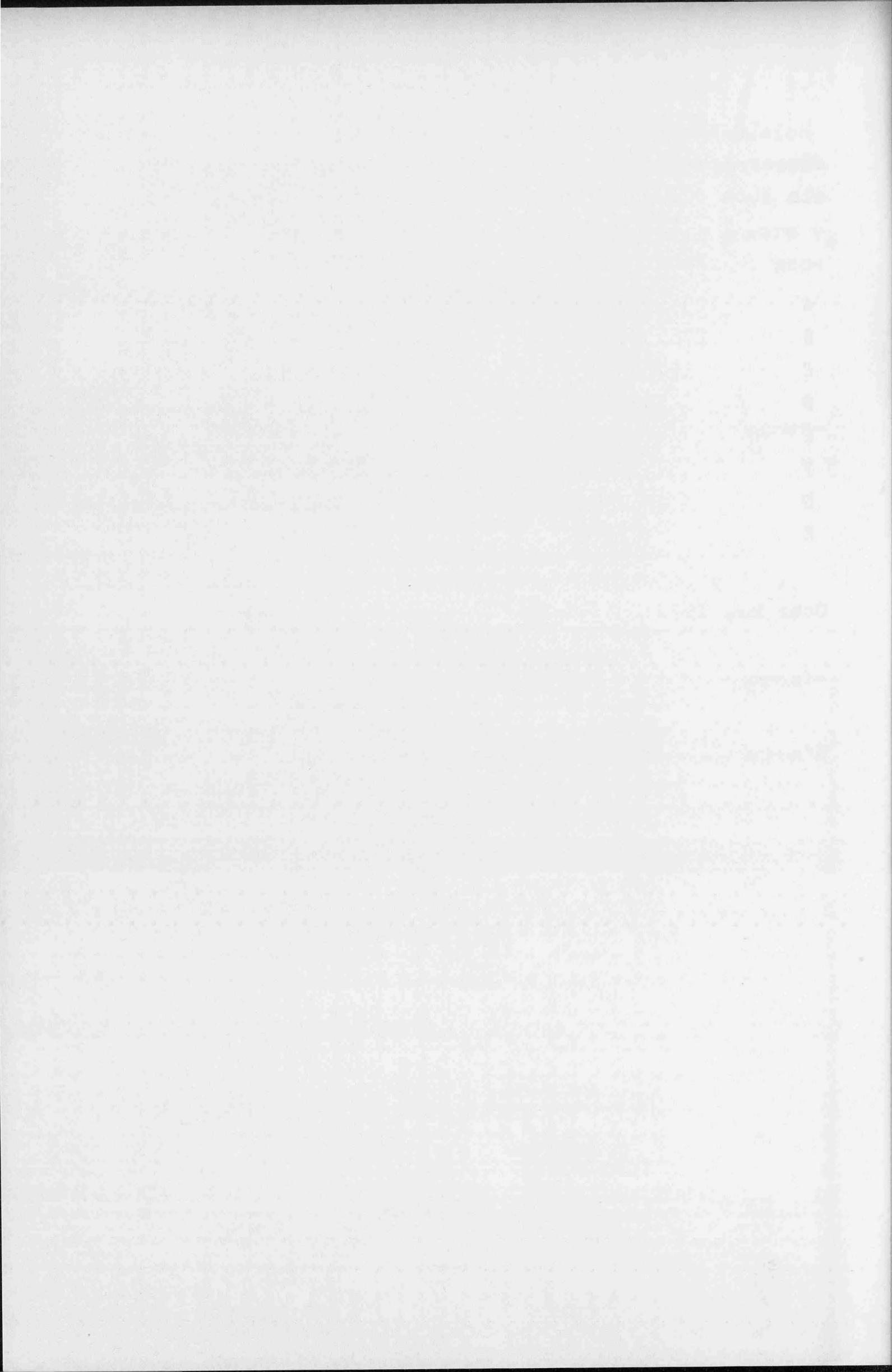
wobei

$$m = \omega^2 a^2 b / kM$$

In der folgenden Tabelle sind die numerischen Werte dieser Konstante sowohl für das internationale Ellipsoid als auch für das Referenzsystem 1967 gegeben.

	Internat.Ellipsoid	Referenzsystem 1967	
A	1254.9900610	1260.2334409	$\text{cm} \cdot \text{sek}^{-2}$
B	276.9419610	282.2015953	
C	1578536525	$1578570555 \cdot 10^{-13} \text{km}^{-1}$	
D	10621708	10577715	
E	8888	8813	
F	250741	250753	$\text{km}^{-2}$
G	4630	4619	
H	39	39	$\text{km}^{-3}$

Oct. 29, 1970



Wladimir K. Hristov - Sofia  
 Ordentliches Mitglied der Bulgarischen  
 Akademie der Wissenschaften

KANONISCHE GLEICHUNGEN DER BEWEGUNG REDUZIERT  
 AUF DIE TOTALE INNERE ENERGIE MIT ANWENDUNG AUF DAS  
 SYSTEM ERDE - MOND

Die kanonischen Gleichungen

Die kanonischen Gleichungen für holonom-skleronom Systeme lauten

$$(1) \quad \dot{q}_s = \frac{\partial(T-U)}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial(T-U)}{\partial q_s} + Q_s$$

$$(2) \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s},$$

worin bedeuten:  $q_s$  - die verallgemeinerten Koordinaten,  $\dot{q}_s$  - die verallgemeinerten Geschwindigkeiten,  $p_s$  - die verallgemeinerten Impulse,  $T$  - die kinetische Energie,  $U$  - die Kräftefunktion der inneren Kräfte (- $U$  ist die potentielle Energie),  $Q_s$  - die nicht konservativen Kräfte samt den äußeren Kräften (konservativ und nicht konservativ).

Im folgenden, da wir  $Q_s$  in innere nichtkonservative Kräfte  $Q_s^{(i)}$  und in äußere Kräfte  $Q_s^{(a)}$  einteilen, schreiben wir der Bequemlichkeit halber

$$(3) \quad Q_s = Q_s^{(i)} + Q_s^{(a)}$$

Wir bilden

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_s dp_s = \frac{\partial(T-U)}{\partial p_s} dp_s \\ \dot{p}_s dq_s = -\frac{\partial(T-U)}{\partial q_s} + Q_s^{(i)} dq_s + Q_s^{(a)} dq_s \end{array} \right.$$

und haben für die innere Arbeit  $d^{(i)} A$

$$(5) \quad d^{(i)} A = \sum Q_s^{(i)} dq_s,$$

für welche verschiedene Arten von innerer Energie  $W$  aufgewandt werden können

$$(6) \quad d^{(1)}A + dW = 0.$$

Die Änderung  $dW$  ist mit der Änderung des Zustandes des Systems verbunden (näherungsweise)

$$(7) \quad dW = \sum \frac{\partial W}{\partial q_s} dq_s + \sum \frac{\partial W}{\partial p_s} dp_s,$$

wo  $W$  im allgemeinen Fall Summe von mehreren verschiedenen Energien ist.

Wir bilden weiter

$$(8) \quad \sum \dot{q}_s dp_s = \sum \frac{\partial(T-U)}{\partial p_s} dp_s$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \sum \dot{p}_s dq_s &= - \sum \frac{\partial(T-U)}{\partial q_s} dq_s - dW + \sum Q_s^{(a)} dq_s = \\ &= - \sum \frac{\partial(T-U)}{\partial q_s} dq_s - \sum \frac{\partial W}{\partial q_s} dq_s - \sum \frac{\partial W}{\partial p_s} dp_s + \sum Q_s^{(a)} dq_s, \end{aligned}$$

woraus wir durch Subtraktion finden

$$(10) \quad \sum q_s dp_s - \sum p_s dq_s = \sum \frac{\partial(T-U+W)}{\partial p_s} dp_s + \sum \frac{\partial(T-U+W)}{\partial q_s} dq_s - \sum Q_s^{(a)} dq_s.$$

Wir führen die totale innere Energie  $E$

$$(11) \quad E = T - U + W$$

ein und erhalten

$$(12) \quad \sum q_s dp_s - \sum p_s dq_s = \sum \frac{\partial E}{\partial p_s} dp_s + \sum \frac{\partial E}{\partial q_s} dq_s - \sum Q_s^{(a)} dq_s.$$

Da wir überall  $dp_s$  und  $dq_s$  als virtuelle Änderungen auffassen können, kommen wir schließlich zu den gesuchten kanonischen Gleichungen der Bewegung

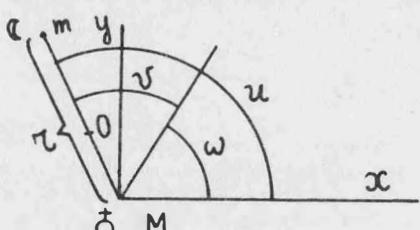
$$(13) \quad \dot{q}_s = \frac{\partial E}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = - \frac{\partial E}{\partial q_s} + Q_s^{(a)}.$$

Wenn äußere Kräfte fehlen,  $Q_s^{(a)} = 0$ , so erscheinen die kanonischen Gleichungen in der symmetrischen Form

$$(14) \quad \dot{q}_s = \frac{\partial E}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = - \frac{\partial E}{\partial q_s},$$

wie sie weiter im System Erde - Mond verwendet werden.

### Die elliptische Bewegung



Wir bilden die kinetische Energie  $T$  bezüglich des Massenmittelpunktes  $O$  Erde - Mond (S. die Figur)

$$(15) \quad T = \frac{1}{2} M \left( \frac{m}{M+m} \dot{r}^2 \right)^2 + \frac{1}{2} M \left( \frac{m}{M+m} r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} m \left( \frac{M}{M+m} \dot{r}^2 \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{M}{M+m} r^2 \dot{\theta}^2 \right) \cdot \dot{\theta}^2$$

und, wenn wir das Verhältnis der Massen einführen

$$(16) \quad \mu = \frac{m}{M},$$

haben wir schließlich

$$(17) \quad T = \frac{1}{2} \frac{m}{1+\mu} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{1+\mu} r^2 \dot{\theta}^2.$$

Die Kräftefunktion ist

$$(18) \quad U = \frac{GMm}{r},$$

wo  $G$  die Gravitationskonstante bedeutet.

Die generalisierten Koordinaten, die generalisierten Geschwindigkeiten und die generalisierten Impulse sind bzw.

$$(19) \quad r = q_r, \quad u = q_u$$

$$(20) \quad \dot{r} = \dot{q}_r, \quad \dot{u} = \dot{q}_u$$

$$(21) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{1+\mu} \dot{r} = p_r, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = \frac{m}{1+\mu} r^2 \dot{u} = p_u.$$

Damit erhalten wir die innere Energie

$$(22) \quad E = T - U = \frac{1}{2} \frac{1+\mu}{m} p_r^2 + \frac{1}{2} \frac{1+\mu}{m} \frac{1}{q_r^2} p_u^2 - GMm \frac{1}{q_r}.$$

Die kanonischen Gleichungen (14) lauten demnach

$$(23) \quad \dot{q}_r = \frac{1+\mu}{m} p_r, \quad \dot{q}_u = \frac{1+\mu}{m} \frac{1}{q_r^2} p_u$$

$$(24) \quad \dot{p}_r = \frac{1+\mu}{m} \frac{1}{q_r^3} p_u^2 - GMm \frac{1}{q_r^2}, \quad \dot{p}_u = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist

$$(25) \quad R = \sqrt{G(M+m)}, \quad (26) \quad n = \frac{R}{a^{3/2}}$$

$$(27) \quad M = n(t-\tau) = nt - n\tau = nt + x$$

$$(28) \quad E - e \sin E = M$$

$$(29) \quad \begin{cases} \tau \sin v = a \sqrt{1-e^2} \sin E \\ \tau \cos v = a(\cos E - e) \end{cases}$$

$$(30) \quad r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

$$(31) \quad u = \omega + v$$

$$(32) \quad \begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u, \end{cases}$$

worin bedeuten:  $a$  - die große Halbachse,  $e$  - die Exzentrizität,  $n$  - die mittlere Bewegung,  $\tau$  - den Moment des Periheldurchgangs,  $M$  - die mittlere Anomalie,  $\chi = -n\tau$  - die mittlere Anomalie für die Epoche  $t = 0$ ,  $E$  - die exzentrische Anomalie,  $r$  - den Radiusvektor,  $v$  - die wahre Anomalie,  $\omega$  - den Abstand des Perihels von der Anfangsrichtung aus,  $u$  - den Polarwinkel von der Anfangsrichtung aus,  $x, y$  - die rechtwinkligen Koordinaten.

Wir fassen als Elemente der Bahn die vier Größen  $a, e, \omega, \chi = -n\tau$  auf und denken uns die generalisierten Koordinaten  $q_r = r, q_u = u$  und die generalisierten Impulsgrößen  $p_r, p_u$  ausgedrückt durch die Zeit und die oben genannten Bahnelemente  $a, e, \omega, \chi$

$$(33) \begin{cases} q_r = \Phi_1(t, a, e, \omega, \chi) \\ q_u = \Phi_2(t, a, e, \omega, \chi) \end{cases} \quad (34) \begin{cases} p_r = \Psi_1(t, a, e, \omega, \chi) \\ p_u = \Psi_2(t, a, e, \omega, \chi) \end{cases}$$

Die Ausdrücke (33) sind eben die Formeln (25) bis (31), und die Ausdrücke (34) sind deren Ableitungen nach der Zeit.

Im besonderen für die Nähe des Perihels  $v = 0$ , was wir weiterhin gebrauchen werden, findet sich leicht

$$(35) \quad r = a(1-e) + \frac{n^2 a e}{2(1-e)^2} (t - \tau)^2 + \dots$$

$$(36) \quad u = \omega + v = \omega + \frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} (t - \tau) + \dots$$

$$(37) \quad r = \frac{n^2 a e}{(1-e)^2} (t - \tau) + \dots$$

$$(38) \quad \dot{u} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} + \dots$$

Es findet sich noch, daß die Flächengeschwindigkeit konstant ist.

$$(39) \quad r^2 \dot{u} = r^2 \dot{v} = n a^2 \sqrt{1-e^2} = R \sqrt{a} \sqrt{1-e^2}.$$

### Die gestörte elliptische Bewegung

Um die gestörte elliptische Bewegung darzustellen, denken wir uns in (33) und (34) die Bahnelemente  $a, e, \omega, \chi$  nach dem Vorbild von Lagrange nicht

mehr konstant, sondern veränderlich

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} q_r = \Phi_1(t, a(t), e(t), \omega(t), \chi(t)) \\ q_u = \Phi_2(t, a(t), e(t), \omega(t), \chi(t)) \end{array} \right.$$

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} p_r = \Psi_1(t, a(t), e(t), \omega(t), \chi(t)) \\ p_u = \Psi_2(t, a(t), e(t), \omega(t), \chi(t)) \end{array} \right.$$

also gilt

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial q_r}{\partial t} + \frac{\partial q_r}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial q_r}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial q_r}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial q_r}{\partial \chi} \dot{\chi} \\ \frac{dq_u}{dt} = \frac{\partial q_u}{\partial t} + \frac{\partial q_u}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial q_u}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial q_u}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial q_u}{\partial \chi} \dot{\chi} \end{array} \right.$$

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial p_r}{\partial t} + \frac{\partial p_r}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial p_r}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial p_r}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial p_r}{\partial \chi} \dot{\chi} \\ \frac{dp_u}{dt} = \frac{\partial p_u}{\partial t} + \frac{\partial p_u}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial p_u}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial p_u}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial p_u}{\partial \chi} \dot{\chi}. \end{array} \right.$$

Im folgenden wenden wir die Methode von Lagrange an. Wir haben für die ungestörte Bewegung

$$(44) \quad \frac{\partial q_r}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial p_r} = 0, \quad \frac{\partial q_u}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial p_u} = 0$$

$$(45) \quad \frac{\partial p_r}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial q_r} = 0, \quad \frac{\partial p_u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial q_u} = 0$$

und schreiben für die gestörte Bewegung

$$(46) \quad \frac{dq_r}{dt} - \frac{\partial E}{\partial p_r} - X' = 0, \quad \frac{dq_u}{dt} - \frac{\partial E}{\partial p_u} - Y' = 0$$

$$(47) \quad \frac{dp_r}{dt} + \frac{\partial E}{\partial q_r} + X = 0, \quad \frac{dp_u}{dt} + \frac{\partial E}{\partial q_u} + Y = 0.$$

Wir kombinieren (46), (44) mit (42) bzw. (47),

(45) mit (43) und bekommen

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q_r}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial q_r}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial q_r}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial q_r}{\partial \chi} \dot{\chi} - X' = 0 \\ \frac{\partial q_u}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial q_u}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial q_u}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial q_u}{\partial \chi} \dot{\chi} - Y' = 0 \\ \frac{\partial p_r}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial p_r}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial p_r}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial p_r}{\partial \chi} \dot{\chi} + X = 0 \\ \frac{\partial p_u}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial p_u}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial p_u}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial p_u}{\partial \chi} \dot{\chi} + Y = 0. \end{array} \right.$$

Indem wir die erste, zweite, dritte und vierte Gleichung bzw. mit  $-\frac{\partial p_r}{\partial a}$ ,  $-\frac{\partial p_u}{\partial a}$ ,  $+\frac{\partial q_r}{\partial a}$  und  $+\frac{\partial q_u}{\partial a}$  multiplizieren und addieren, wird  $\dot{a}$  eliminiert. In ähnlicher Weise werden nacheinander  $\dot{e}$ ,  $\dot{\omega}$  und  $\dot{\chi}$  eliminiert.

Wir führen die Klammern von Lagrange

$$(49) \left\{ \begin{array}{l} [a, e] = \frac{\partial q_r}{\partial a} \frac{\partial p_e}{\partial e} - \frac{\partial q_e}{\partial e} \frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial q_u}{\partial a} \frac{\partial p_u}{\partial e} - \frac{\partial q_u}{\partial e} \frac{\partial p_u}{\partial a} \end{array} \right.$$

und die Abkürzungen

$$(50) \left\{ \begin{array}{l} R_a = X \frac{\partial q_r}{\partial a} + Y \frac{\partial q_u}{\partial a} + X' \frac{\partial p_r}{\partial a} + Y' \frac{\partial p_u}{\partial a} \end{array} \right.$$

ein und bekommen die Gleichungen

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} [a, e] \dot{e} + [a, w] \dot{\omega} + [a, \chi] \dot{\chi} + R_a = 0 \\ [e, a] \dot{a} + [e, w] \dot{\omega} + [e, \chi] \dot{\chi} + R_e = 0 \\ [w, a] \dot{a} + [w, e] \dot{e} + [w, \chi] \dot{\chi} + R_w = 0 \\ [\chi, a] \dot{a} + [\chi, e] \dot{e} + [\chi, w] \dot{\omega} + R_\chi = 0. \end{array} \right.$$

Es ist bewiesen, daß es gilt

$$(52) \quad [a, e] = -[e, a], \quad \dots$$

$$(53) \quad \frac{\partial [a, e]}{\partial t} = 0, \quad \dots$$

Indem wir (19), (21), (35), (36), (37), (38) und

(39) benutzen, bilden wir die Klammern von Lagrange

(49) und zwar für den Perihelpunkt  $v = 0$ , d. h.

$t = \tau$ , wobei wir den Umstand benutzen, daß nach

(53) sie die Zeit explizit nicht enthalten:

$$(54) \quad [a, e] = 0, \quad (55) \quad [a, w] = \frac{m}{1+\mu} \left( -\frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \right)$$

$$(56) \quad [a, \chi] = \frac{m}{1+\mu} \left( -\frac{1}{2} n a \right), \quad (57) \quad [e, w] = \frac{m}{1+\mu} \frac{n a^2 e}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$(58) \quad [e, \chi] = 0, \quad (59) \quad [w, \chi] = 0.$$

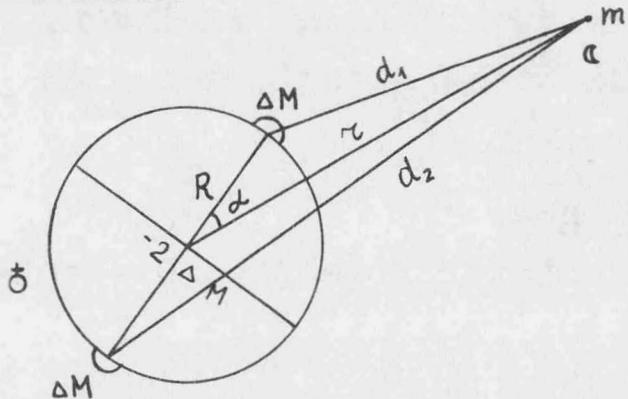
Demnach lauten die Gleichungen (51)

$$(60) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \cdot \dot{\omega} - \frac{1}{2} n a \cdot \dot{\chi} = -\frac{1+\mu}{m} R_a \\ \frac{n a^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \dot{\omega} = -\frac{1+\mu}{m} R_e \\ \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \cdot \dot{a} - \frac{n a^2}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \dot{e} = -\frac{1+\mu}{m} R_\omega \\ \frac{1}{2} n a \cdot \dot{a} = -\frac{1+\mu}{m} R_\chi \end{array} \right.$$

oder aufgelöst

$$(61) \left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = -\frac{1+\mu}{m} \frac{2}{n a} R_\chi \\ \dot{e} = +\frac{1+\mu}{m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} R_\omega - \frac{1+\mu}{m} \frac{(1-e^2)}{n a^2 e} R_\chi \\ \dot{\omega} = -\frac{1+\mu}{m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} R_e \\ \dot{\chi} = +\frac{1+\mu}{m} \frac{2}{n a} R_a + \frac{1+\mu}{m} \frac{1-e^2}{n a^2 e} R_e. \end{array} \right.$$

## Die Flutwellen und die Gleichungen der gestörten Bewegung



Wir denken uns die beiden Flutwellen der Erde, die wir als Kugel mit dem Radius  $R$  auffassen, nämlich dem Monde zu und abgewandt, mit den Massen je  $\Delta M$ . Infolge der Reibung sind sie um den Winkel  $\alpha$  fortgeschoben. Als Ebbe denken wir uns die entsprechenden Massendefekte  $-2\Delta M$  symmetrisch auf einem Kreis verteilt.

(S. die Figur.) Natürlich ist dies eine Approximation.

Wir schreiben

$$(62) \quad \begin{cases} d_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha \\ d_2^2 = r^2 + R^2 + 2rR \cos \alpha \end{cases}$$

oder

$$(63) \quad \begin{cases} \frac{1}{d_1} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{R}{r} \cos \alpha + \frac{R^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{d_2} = \frac{1}{r} \left( 1 + 2 \frac{R}{r} \cos \alpha + \frac{R^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Daraus leiten wir, indem wir zu der Kräftefunktion übergehen, die Entwicklungen ab

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{Gm\Delta M}{d_1} = Gm\Delta M \left[ \frac{1}{r} + \frac{R}{r^2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^3} \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \frac{R^3}{r^4} \cos \alpha \right] \\ \frac{Gm(-2\Delta M)}{r} = Gm\Delta M \left[ -\frac{2}{r} \right] \\ \frac{Gm\Delta M}{d_2} = Gm\Delta M \left[ \frac{1}{r} - \frac{R}{r^2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^3} \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} \frac{R^3}{r^4} \cos \alpha \right], \end{cases}$$

welche Gleichungen miteinander addiert, zu der Störung der Kräftefunktion  $U$  führen

$$(65) \quad \Delta U = \frac{GmR^2}{r^3} \Delta M (3 \cos^2 \alpha - 1).$$

Die Reibungskraft ist

$$(66) \quad - \frac{\partial \Delta U}{R \partial \alpha} = 3 \frac{GmR}{r^3} \Delta M \sin 2\alpha$$

und damit erhalten wir die entstandene Wärme  $W$

$$(67) \quad W = 3 \frac{GmR}{r^3} \Delta M \sin 2\alpha \cdot R \varphi = 3 \frac{GmR^2}{r^3} \Delta M \sin 2\alpha \cdot q_{\varphi},$$

wo  $\varphi = q_{\varphi}$  der Winkel ist, um den sich die Erde in-

zwischen gedreht hat. Dabei haben wir wiederum eine Approximation gemacht indem wir die Rotationsachse der Erde senkrecht zur Ebene der Mondbahn annahmen.

Wir führen noch die kinetische Energie der sich drehenden Erde ein

$$(68) \quad T_\varphi = \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2,$$

wo  $C$  das polare Inertialmoment der Erde ist. Die entsprechende Impulsgröße ist

$$(69) \quad \frac{\partial T_\varphi}{\partial \dot{\varphi}} = C \dot{\varphi} = p_\varphi.$$

Demnach ist die volle Energie nach (22), (68), (65) und (67)

$$(70) \quad E = \frac{1+\mu}{2m} \cdot p_r^2 + \frac{1+\mu}{2m} \cdot \frac{1}{q_r^2} \cdot p_u^2 + \frac{1}{2C} \cdot p_\varphi^2 - GMm \cdot \frac{1}{q_r} - GmR \cdot \Delta M (3\cos^2\alpha - 1) \cdot \frac{1}{q_r^3} + 3GmR \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{q_r^3} \cdot q_\varphi.$$

Aus (70) bilden wir die kanonischen Gleichungen

$$(71) \quad \dot{q}_r = \frac{1+\mu}{m} \cdot p_r$$

$$(72) \quad \dot{q}_u = \frac{1+\mu}{m} \cdot \frac{1}{q_r^2} \cdot p_u$$

$$(73) \quad \dot{q}_\varphi = \frac{1}{C} \cdot p_\varphi$$

$$(74) \quad \dot{p}_r = \frac{1+\mu}{m} \cdot \frac{1}{q_r^3} \cdot p_u^2 - GMm \cdot \frac{1}{q_r^2} - 3GmR \cdot \Delta M (3\cos^2\alpha - 1) \cdot \frac{1}{q_r^4} + 9GmR \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{q_r^4} \cdot q_\varphi$$

$$(75) \quad \dot{p}_u = 0$$

$$(76) \quad \dot{p}_\varphi = -3GmR \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{q_r^3}.$$

Wir werden uns gleich mit den Gleichungen (73) und (76) befassen und haben

$$(77) \quad \ddot{\varphi} = -\frac{3GM\mu R^2}{Ca^3} \cdot \Delta M \sin 2\alpha,$$

worin wir  $q_r = r$  durch die große Halbachse  $a$  der Mondbahn ersetzt haben. Die Integration ergibt

$$(78) \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 - \frac{3GM\mu R^2}{Ca^3} \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot t$$

$$(79) \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 \cdot t - \frac{3GM\mu R^2}{2Ca^3} \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot t^2.$$

## Die Integration der Bewegungsgleichungen des Monde

Wir schreiben (71), (72), (74) und (75) noch ein

Mal auf

$$(80) \quad \dot{q}_r = \frac{1+\mu}{m} \cdot p_r$$

$$(81) \quad q_u = \frac{1+\mu}{m} \cdot \frac{1}{q_r^2} \cdot p_u$$

$$(82) \quad p_r = \frac{1+\mu}{m} \cdot \frac{1}{q_r^3} \cdot p_u^2 - GMm \cdot \frac{1}{q_r^2} - \frac{3GM^2R^2}{a^4} \Delta M (3\sin^2 d - 1) + \\ + \frac{9GmR^2\dot{\varphi}_o}{a^4} \cdot \Delta M \sin 2d \cdot t$$

$$(83) \quad \dot{p}_u = 0$$

Das Vergleichen von (80) und (81) mit (44) und (46) und das Vergleichen von (82) und (83) mit (45) und (47) ergibt

$$(84) \quad X' = 0,$$

$$(85) \quad Y' = 0$$

$$(86) \quad X = \frac{3GM^2R^2}{a^4} \Delta M (3\cos^2 d - 1) - \frac{9GmR^2\dot{\varphi}_o}{a^4} \Delta M \sin 2d \cdot t$$

$$(87) \quad Y = 0$$

Weiter reduzieren sich (50) nur auf

$$(88) \quad R_a = X \frac{\partial q_r}{\partial a}, \quad R_e = X \frac{\partial q_r}{\partial e}, \quad R_\omega = X \frac{\partial q_r}{\partial \omega}, \quad R_x = X \frac{\partial q_r}{\partial x}.$$

Mittels (20), (27), (28) und (30) finden wir

$$(89) \quad \frac{\partial r}{\partial a} = 1 - e \cos M - \frac{3}{2} n e \sin M \cdot t + \dots$$

$$(90) \quad \frac{\partial r}{\partial e} = ae - a \cos M - a e \cos M + \dots$$

$$(91) \quad \frac{\partial r}{\partial \omega} = 0, \quad (92) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = ae \sin M + \dots$$

Hier muß bei der Bildung von  $\frac{\partial r}{\partial a}$  berücksichtigt werden, daß die große Halbachse  $a$  ein Mal explizit auftritt, und ein zweites Mal in  $n$  enthalten ist.

Wir beschränken uns auf die säkularen Störungen. Deshalb streichen wir  $M$  in (89) bis (92) und bekommen für (61)

$$(93) \quad \dot{a} = 0,$$

$$(94) \quad \dot{e} = 0$$

$$(95) \quad \dot{\omega} = -\frac{1+\mu}{m} \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} X$$

$$(96) \quad \dot{\chi} = \frac{1+\mu}{m} \frac{3-e^2}{na} X,$$

oder wenn wir  $X$  aus (86) eintragen

$$(97) \quad \dot{\omega} = -\frac{3G(1+\mu)R^2\sqrt{1-e^2}}{na^5} \Delta M (3\cos^2 d - 1) + \\ + \frac{9G(1+\mu)R^2\sqrt{1-e^2}\dot{\varphi}_o}{na^5} \Delta M \sin 2d \cdot t$$

$$(98) \quad \chi = \frac{3G(1+\mu)R^2(3-e^2)}{na^5} \cdot \Delta M (3\cos^2\alpha - 1) - \\ - \frac{9G(1+\mu)R^2(3-e^2)\dot{\varphi}_0}{na^5} \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot t.$$

Es erscheinen also säkulare Störungen in der mittleren Anomalie der Epoche und in der Apsidenlinie.

Wir gehen zu der mittleren Länge  $L$  über

$$(99) \quad L = (nt + \chi) + \omega,$$

woraus folgt

$$(100) \quad \dot{L} = n\dot{\chi} + \dot{\omega} = n + \frac{6G(1+\mu)R^2(1-\frac{1}{4}e^2)}{na^5} \cdot \Delta M (3\cos^2\alpha - 1) - \\ - \frac{18G(1+\mu)R^2(1-\frac{1}{4}e^2)\dot{\varphi}_0}{na^5} \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot t,$$

oder durch Integration

$$(101) \quad L = L_0 + (n + \sigma) \cdot t + S \cdot t^2 = \\ = 1 + \left( n + \frac{6G(1+\mu)R^2(1-\frac{1}{4}e^2)}{na^5} \cdot \Delta M (3\cos^2\alpha - 1) \right) \cdot t - \\ - \frac{9G(1+\mu)R^2(1-\frac{1}{4}e^2)\dot{\varphi}_0}{na^5} \cdot \Delta M \sin 2\alpha \cdot t^2.$$

### Schlußfolgerung

Die vom Monde verursachten Ebbe und Flut verursachen ihrerseits: erstens, auf der Erde durch Reibung eine langsame Verringerung der Drehgeschwindigkeit der Erde, und zweitens, rückwärts auf den Mond eine kleine Änderung der mittleren Bewegung, eine säkulare Verzögerung, d. h. ein quadratisches Glied in der mittleren Länge und ein säkulares Vowärtsschreiten der Apsidenlinie, d. h. ein quadratisches Glied in dem Perihelabstand.

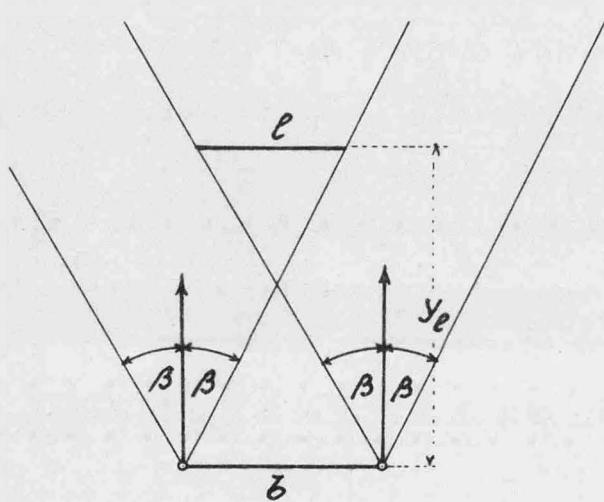
## BEITRÄGE DES I. GEODÄTISCHEN INSTITUTES DER TH GRAZ

1) K.HUBENY: Günstigste Aufnahmeanordnungen in der  
Industriephotogrammetrie.

Die Anregung zu den nachfolgenden Zeilen geht von photogrammetrischen Aufnahmeeinrichtungen aus, die mit zwei Basislängen bei fester Entfernungseinstellung, in einem Falle auch mit Vorsatzlinsen für Anwendungen der Bildmessung angeboten werden, die man neuerdings als "Industriebildmessung" bezeichnet.

Der Sammelbegriff Industriebildmessung soll wohl alle Anwendungen der Bildmessung einschließen, die einerseits technischen und wissenschaftlichen Zwecken dienen, andererseits sich in ihre Problemstellung, Aufnahmeanordnung und in der Methodik der Auswertung von der hauptsächlichsten Anwendung der Bildmessung in irgendeiner Form unterscheiden. Versucht man unter diesen Gesichtspunkten das Gebiet der Industriephotogrammetrie zu umgrenzen, so muß man die untere Grenze wohl in das Gebiet der Makro- und Mikrobildmessung verlegen, die obere Grenze wird hingegen zweifellos dort gegeben sein, wo die topographischen Anwendungen beginnen. Der Schwerpunkt dürfte hiebei vielleicht in jenem Bereich liegen, den man als Nahbildmessung bezeichnet und der durch mittlere Abbildungsmaßstäbe von 1:1 bis 1:100, vielleicht 1:200 umgrenzt wird. Ein wesentliches Kriterium der Nahbildmessung und damit zum Teil auch der Industriebildmessung erscheint dadurch gegeben, daß sie Aufnahmeanordnungen umfaßt, in denen die Kammerkonstante noch gleich oder größer als die Gauß'sche Brennweite ist; während man die Nahbildmessung etwa mit dem Abbildungsmaßstab 1:1 begrenzen kann, müßten sich die Themen der Industriebildmessung bis in die Mikrophotogrammetrie erstrecken können.

Für die Praxis der Nah- und Industriephotogrammetrie bietet nun die Industrie wie erwähnt u.a. Aufnahmeeinrichtungen in Form von Doppelkammern mit fester gegenseitiger Orientierung (Normalfall), zwei verschiedenen festen Basislängen und, wie ebenfalls einleitend erwähnt, mit Vorsatzlinsen für bestimmte Nahbereiche an, so daß Aufnahmebereiche etwa ab dem mittleren Abbildungsmaßstab von 1:10 erschlossen werden. Es stehen damit zwei Basislängen und einige mittlere Aufnahmeentfernung zur Verfügung - wie man sieht, eigentlich viel zu wenig an Variationsmöglichkeiten, um den Bereich der Industriebildmessung wirklich erschließen zu können. Im folgenden soll über diese Feststellung hinaus untersucht werden, welche Anforderungen an derartige Aufnahmegeräte zur Erzielung optimaler Ergebnisse zu stellen sind.



Nimmt man für einen kleineren mittleren Abbildungsmaßstab an, das Aufnahmeobjekt einer Nahaufnahme habe in der Richtung der Basis eine Ausdehnung  $l$  - natürlich unter der Voraussetzung, es läge im brauchbar scharf abgebildeten Bereich - so ist die kleinste mögliche Aufnahmeentfernung  $y_e$  für eine Basislänge  $b$ , wie sich aus der obenstehenden Abbildung ablesen läßt, bei einem nutzbaren Bildwinkel  $2\beta$  aus

$$y_e = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \beta + \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta (b + l) \quad (1)$$

gegeben, d.h. die kleinstmögliche und daher für eine bestimmte Basislänge günstigste Aufnahmeentfernung ist eine Funktion der Basislänge. Für eine und dieselbe Ausdehnung der Objektes sind

aber verschiedene Basen und, ihnen immer als Optimum zugeordnet, verschiedene minimale Aufnahmeentfernungen möglich. Die günstigste Aufnahmeanordnung (günstigste Basislänge) wird sicherlich die sein, durch die der Einfluß der stereoskopischen Meßunsicherheit auf das geringste Ausmaß beschränkt wird.

Aus der Grundformel der Stereophotogrammetrie folgt bekanntlich

$$dy = -\frac{y^2}{bc} d\beta , \quad (2)$$

also die sich aus der Parallaxenunsicherheit  $d\beta$  ergebende Unsicherheit in der y-Richtung. Trägt man hierin (1) ein und faßt man die Größen  $c, \beta$  und  $d\beta$  in eine Konstante  $k$  zusammen (hinsichtlich  $c$  und  $\beta$  ist dies eine Näherung, die für die Bildmaßstäbe bis etwa 1:10 möglich ist), so erhält man bei Weglassung des Vorzeichens

$$dy = k \frac{(b+l)^2}{b} , \quad (3)$$

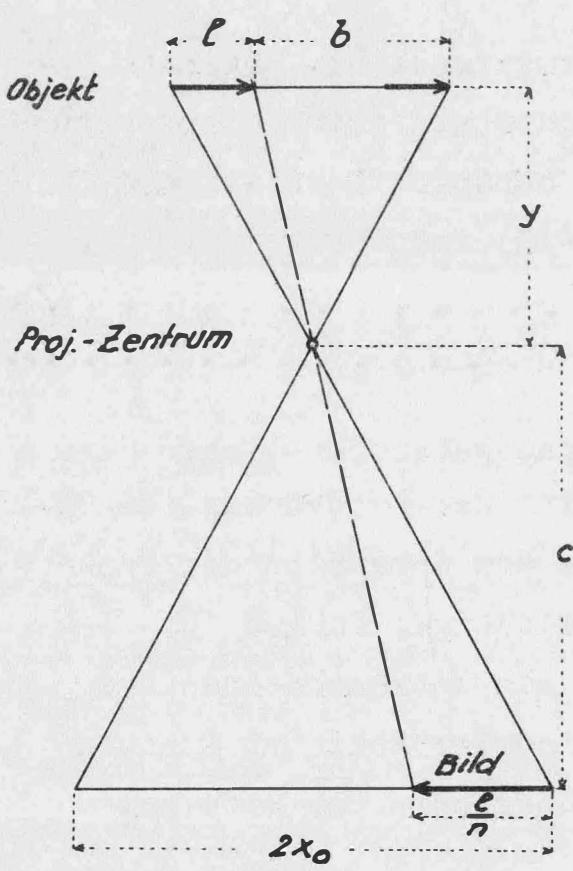
woraus man erkennt, daß die zu erwartende Unsicherheit der stereoskopischen Messung unter sonst gleichen Voraussetzungen von der gewählten Basislänge abhängt. Das Extremum (Minimum) für den zweiten Faktor in (3) ist für

$$b = l \quad \text{und} \quad y_p = b \operatorname{ctg} \beta \quad (4)$$

gegeben, d.h. die günstigsten Voraussetzungen liegen dann vor, wenn die Basislänge gleich ist der Ausdehnung des Objektes in Richtung der Basis. Aus dem Schaubild der Funktion (3) läßt sich als weiterer wichtiger Schluß für die Aufnahmedisposition ablesen, daß ein Unterschreiten der günstigsten Basislänge bald zu einem erheblichen Genauigkeitsverlust führt, während das Überschreiten sich nur langsam auswirkt.

Das vorliegende Ergebnis scheint für die Nahbildmessung charakteristisch zu sein, ist aber in der Luftbildmessung bereits vorweggenommen. Für einen Streifen von Senkrechtaufnahmen eines ebenen Geländes ist nämlich der größte Bildmaßstab bei der theoretisch geringsten Längsüberdeckung von 50 % gegeben. Die daraus folgende Modellbreite ist dann gleich der halben Seitenlänge des Geländequadrates; ebenso lang muß aber die Basis sein, wenn die 50 % Überdeckung erreicht werden soll. Für diesen Grenzfall ist aber die Basislänge gleich der Modellbreite und damit die Flughöhe ein Minimum.

Die den Formeln (3) und (4) zugrundeliegenden Voraussetzungen hinsichtlich Bildwinkel und Kammerkonstanten sind nicht mehr hinreichend erfüllt, wenn der Abbildungsmaßstab über ein bestimmtes Maß hinaus ansteigt. Damit ist eine Vergrößerung der Kammerkonstanten und eine Verkleinerung des Bildwinkels verbunden, u.U. wird eine stereoskopische Aufnahme sogar unmöglich.



Die nebenstehende Abbildung, die unter der Annahme einer feststehenden Kammer und eines um die Basis zwischen den Aufnahmen verschobenen Objektes gezeichnet ist, läßt die bestehenden Beziehungen ablesen. Soll das um die Basis  $b$  verschobene Objekt  $l$  in der Bildebene von der Dimension  $2x_0$  in beiden Stellungen noch zur Abbildung gelangen, so muß zwischen den Größen  $l, b, x_0, y$  und  $c$  die Beziehung

$$\frac{b+\ell}{2x_0} - \frac{y}{c} = n \quad (5)$$

bestehen, wenn  $n$  die Maßstabszahl im Abbildungsmaßstab  $m = 1:n$  bedeutet. Daraus folgt mit

$$b = 2x_0n - \ell \quad (6)$$

die mögliche Basis für eine Maßstabszahl  $n$  und eine Objektgröße  $\ell$ . Für  $b=0$  ergibt sich daraus mit

$$n_0 = \frac{\ell}{2x_0} \quad (7)$$

jener Abbildungsmaßstab, für den das Bild des Objektes die Bildfläche (betrachtet ist nur die x-Richtung) gerade ausfüllt.

Stellt man wieder die Frage nach der absoluten stereoskopischen Meßunsicherheit, so hat man zu deren Beantwortung in (2) die Quotienten  $\frac{y}{c}$  und  $\frac{y}{b}$  einzutragen. Der erstere davon ist in (5) bereits angeschrieben; aus der Figur entnimmt man weiter

$$\frac{y}{b} = \frac{c}{2x_0 - \frac{\ell}{n}} \quad (8)$$

Trägt man (5) und (8) unter Berücksichtigung der sich mit dem Abbildungsmaßstab nach

$$c = f(1 + \frac{1}{n}) \quad (9)$$

ändernden Kammerkonstanten in (2) ein, so erhält man mit

$$dy = f \cdot \partial \phi \frac{n^2 + n}{2nx_0 - \ell} \quad (10)$$

die zu erwartende stereoskopische Meßunsicherheit. Man erkennt daraus zunächst, daß kleinere Brennweiten zu günstigeren Ergebnissen führen; dieser Umstand findet seine Erklärung darin, daß die kleinere Brennweite bei festgehaltenen weiteren Bestimmungsstücken ein günstigeres Basisverhältnis ergibt. Hält man in (10) die Größen  $x_0, \ell, f$  und  $\partial \phi$  fest - dies charakteri-

siert immer einen Aufnahmefall - so wird die stereoskopische Meßunsicherheit zu einer Funktion des Abbildungsmaßstabes, die durch den Bruch im Ausdruck (10) gegeben ist. Diese Funktion zeigt an der Stelle  $n = \frac{\ell}{2x_0}$  eine Unstetigkeit, d.h. sie springt von  $-\infty$  auf  $+\infty$ ; von  $+\infty$  weg sinkt sie steil bis zu einem Minimum ab, um von da aus langsam wieder anzusteigen. Für den Abbildungsmaßstab

$$n_g = \frac{\ell}{2x_0} + \sqrt{\frac{\ell^2}{4x_0^2} + \frac{\ell}{2x_0}} \quad (11)$$

erreicht sie das Minimum im positiven Bereich von  $n$ ; im obigen Ausdruck ist also mit der Maßstabszahl  $n_g$  der günstigste Abbildungsmaßstab  $m_g = 1:n_g$  gegeben. Die Formel (11) kann mit (7) umgeschrieben werden in

$$n_g = n_0 + \sqrt{n_0^2 + n_0} \quad (12)$$

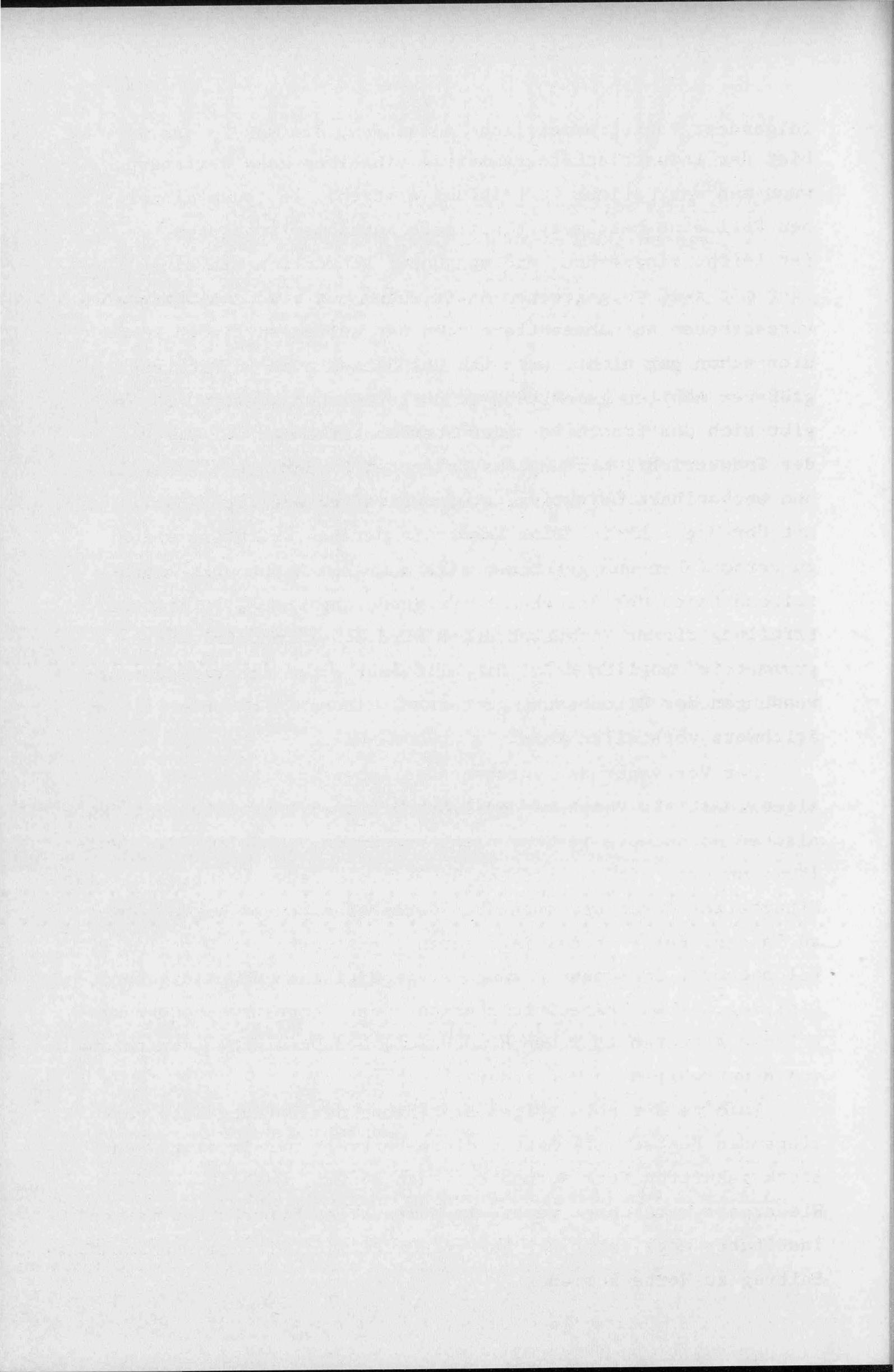
Dieser "günstigste" Abbildungsmaßstab  $1:n_g$  errechnet sich, wie man sieht, leicht aus der Ausdehnung des Objektes und der nutzbaren Dimension des Bildfeldes in der x-Richtung, er kann aber auch experimentell einfach ermittelt werden, wenn man den formatfüllenden Abbildungsmaßstab  $n_0$  bestimmt. Das Funktionsbild von (10) zeigt ebenso wie früher, daß es weniger von Belang ist, wenn die günstigste Maßstabszahl  $n_g$  überschritten wird (kleinerer Abbildungsmaßstab bei größerer Basis) gegenüber einer Abweichung nach unten hin (größerer Abbildungsmaßstab als der günstigste bei kleinerer Basis). Nochmals darf darauf verwiesen werden, daß alle angestellten Überlegungen voraussetzen, daß die geforderte Aufnahmeanordnung photographisch überhaupt möglich ist (Einstellmöglichkeit, Bereich brauchbarer Scharfabbildung, Möglichkeit der Basiseinstellung).

Versucht man aus den im vorangegangenen angestellten Überlegungen die Schlußfolgerung zu ziehen, so ergibt sich

folgendes: Photogrammetrische Aufnahmen, die man in das Gebiet der Industriephotogrammetrie einreihen kann verlangen, wenn man das Optimum an Leistung erstrebt, in jedem einzelnen Fall eine bestimmte günstigste Aufnahmedisposition. Es ist leicht einzusehen, daß man dabei schwerlich mit einer oder mit zwei vorgegebenen Basislängen und ein, zwei ebenfalls vorgegebenen Aufnahmeentfernungen das Auslangen finden kann, dies schon gar nicht, wenn man das Gebiet auch in Richtung größerer Abbildungsmaßstäbe zu überstreichen wünscht. So ergibt sich das Idealbild einer Stereometerkammer für Zwecke der Industriebildmessung aus folgenden Forderungen: Einstell- und wechselbare Objektive, stufenweise veränderliche Basis mit der Möglichkeit, eine Kammer in der Basisrichtung meßbar zu verschieben und gegebenenfalls auch zum Hauptpunkt exzentrische Lagen der Bildebenen (Vergrößerung von  $x_0$ ). Erst bei Erfüllung dieser Voraussetzungen wird eine "Industriephotogrammetrie" möglich sein, die alle oder einen Großteil der Anwendungen der Bildmessung gestattet, die man sich unter diesem Stichwort vorstellen kann.

Der Verfasser der vorstehenden Arbeit wollte es in seiner Eigenschaft als Vorstand des I.Geodätischen Institutes der Technischen Hochschule in Graz nicht versäumen, anlässlich des Jubiläums unseres großen Geodäten Dr.Dr.h.c.K.Ledersteger auch seine Mitarbeiter durch Berichte über deren Arbeiten zu Worte kommen zu lassen. Folgende Beiträge waren bereitgestellt: Dipl.Ing.F. Feldbacher (Eine neue Lösung der geodätischen Hauptaufgaben), Dipl.Ing.<sup>R.</sup>Kostka (Expeditionsbericht über terrestr.-photogrammetrische Arbeiten im Hohen Hindukusch) und Dr.H.Ettl (Eintragung von Bauentwürfen in Meßbilder).

Infolge der notwendigen Begrenzung des Umfanges der vorliegenden Festschrift hätten diese Beiträge nur in einer sehr stark gekürzten Form Aufnahme finden können, weshalb auf deren Wiedergabe verzichtet wurde. Im Namen aller Mitarbeiter meines Institutes möge daher nur ao.Prof.Dr.Pflüger mit dem nachstehenden Beitrag zu Worte kommen.



2) W.PFLÜGER: Fehlerhafte Koordinatenmessungen durch  
Ungenauigkeiten in den Zahnradübertragungen.

Walter PFLÜGER

Im Zusammenhang mit einem von mir gemachten Vorschlag für ein "Koordinatometer" (Instrument zur Ermittlung der Koordinatenunterschiede zwischen Standpunkt und Zielpunkt durch Ablesung an einer im Zielpunkt aufgestellten horizontalen Latte) war es u.a. von einiger Wichtigkeit, Aufschlüsse darüber zu erhalten, wie sich Zahnradübertragungen mit ihren Ungenauigkeiten auf die Meßergebnisse auswirken. Um praktische Ergebnisse zu erhalten, wurde als Behelfslösung das Fernrohr eines Zeiss - Bosshardt - Instrumentes mit Hilfe eines Zwischenstückes so in den Dreifuß eingesetzt, daß die Kippachse lotrecht steht, der Höhenkreis horizontal liegt. (Siehe Bild)



Zur Messung von Koordinatenunterschieden wurde das Fernrohr um verschiedene Beträge verschwenkt und hernach das Zwischenstück mit dem Fernrohr und Höhenkreis im Dreifuß zurückgedreht. (Repetition). Die Feineinstellung erfolgte durch einen Ein-

stellarm ( siehe Bild ) von Hand aus. Da beim Zeiss-Bosshardt das große Zahnrad nur mit Reibung auf der Kippachse aufsitzt und die Funktion der Versicherungslibelle in der verwendeten Stellung ausfällt, mußte die Messung mit großer Vorsicht ausgeführt werden. Insbesondere waren ruckartige Bewegungen zu vermeiden.

Aus den Meßreihen geht hervor:

Mißt man Koordinatenunterschiede für orientierte Richtungen mit einem Abstand von  $10^\circ$  bzw. ungefähr  $10^\circ$  (Altgradinstrument), so ergibt sich für den Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  ungefähr die gleiche Genauigkeit. ( Der Fehler der Zahnradübertragung tritt kaum in Erscheinung, da er ungefähr gleich ist dem Ablesefehler). Weiters konnte hiebei ein toter Gang der Zahnräder nicht festgestellt werden. ( Einstellung von einer Richtung und von beiden Richtungen her). Dieses günstige Ergebnis verschlechterte sich jedoch erheblich bei Änderung der orientierten Richtungen von fortlaufend immer nur kleinen Beträgen. Der Fehler steigt mit der Zahl der Einstellungen an und verringert sich wieder, wenn die Änderungen der orientierten Richtungen größer werden. Erfolgt bei kleinen Änderungen der orientierten Richtungen die Einstellung sukzessive von links und von rechts her, so erhält man unbrauchbare Ergebnisse. Ob dies eine Besonderheit des verwendeten Instrumentes ist, oder ob an der "Kompensation" der Zahnräder, wie sie beim Zeiss- Bosshardt eingebaut ist, zum Zwecke der Koordinatenmessung Verbesserungen notwendig wären, kann nur durch Heranziehung weiterer Instrumente beantwortet werden. Wenn bei praktischen Messungen von Koordinatenunterschieden mehrmals aufeinanderfolgende kleine Richtungsänderungen vermieden werden, ist diese Erscheinung weniger wichtig.

**Einige Meßergebnisse:**

**Polarabstand = 54,37 m**

**Einstellung von links und von rechts**

orientierte Richtung	Soll - Ist für $\Delta y$
0°	0,00 m Einstellung
10	+ 0,02
20	- 0,02
30	- 0,01
40	- 0,02
50	- 0,03
60	- 0,03
70	+ 0,01
80	- 0,01
90	0,00
100	- 0,01
110	- 0,01
120	- 0,01
130	+ 0,01
140	0,00
150	+ 0,02
160	+ 0,03
170	+ 0,01
180	nicht meßbar, Okular verdeckt.

**Polarabstand = 54,37 m**

**Einstellung nur von links**

orientierte Richtung	Soll - Ist für $\Delta y$
0° 00'00"	0,00 m Einstellung
0 03 10	+ 0,01
0 07 00	+ 0,01
0 11 40	+ 0,02
0 20 00	+ 0,02
0 28 50	+ 0,03
0 35 20	+ 0,03

0° 47' 20"	+ 0,05
1 00 20	+ 0,05
1 10 10	+ 0,07
1 23 00	+ 0,07
2 14 00	+ 0,04
4 07 10	+ 0,09
10 12 50	+ 0,06
19 08 20	+ 0,00
29 11 00	+ 0,02
39 11 40	- 0,02
50 11 40	- 0,03
60 08 20	0,00
70 10 10	+ 0,01
80 15 40	- 0,01
90 14 00	- 0,01

Die Meßreihen, die mehrmals wiederholt wurden, zeigten gute Übereinstimmung. ( Einige Messungen waren jedoch wegen zu geringer Vorsicht unbrauchbar ).

#### Umbildung der hyperbelförmigen Ziellinie eines Fernrohres in eine Gerade.

Bildet man für verschiedene Stellungen der Fokussierungs - linse einen auf dem " Vertikalfaden " liegenden Punkt P durch Fokussierungslinse und Objektivlinse in den Gegenstandsraum ab, so ergibt die Verbindung der Bildpunkte ( Ziellinie ) bekanntlich eine Hyperbel, die nie in ein Geradenpaar entartet.

Im folgenden legen wir eine Gerade fest und bewirken den Übergang der Hyperbel in diese Gerade. Wir wollen diesen Übergang für den am ehesten interessierenden Nahbereich ( bis zu 200 m) ausführen. Die Gerade nehmen wir so an, daß sie den Richtungs-

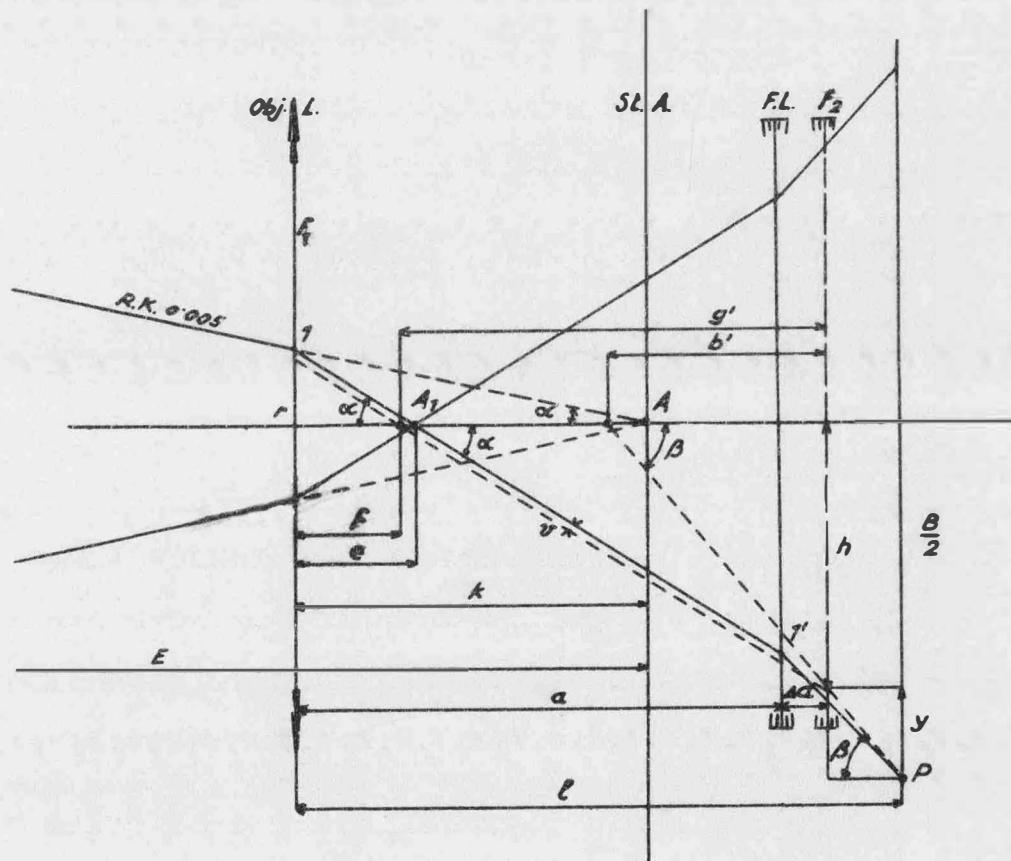
koeffizienten 0,005 hat und die optische Achse im Schnittpunkt mit der Stehachse trifft. Um als Ziellinie die angenommene Gerade zu erhalten, könnte man:

- A) dem durch die Objektivlinse gebrochenen Lichtstrahl 1,1' (siehe Figur) für alle angezielten Punkte eine solche Lage geben, daß er nach dem Durchgang durch die Fokussierungslinse den festen Punkt P trifft
- B) den Punkt P beweglich machen.

Die Forderung nach Punkt A (von dieser soll hier die Rede sein) ist am besten durch eine Parallelverschiebung mittels eines Keilmikrometers zu erreichen.

Der Einfachheit halber wollen wir

- a) ein zentriertes Linsensystem annehmen,
- b) die Rechnung für dünne Linsen ausführen.



Die Verschiebung des Strahles nach Punkt A beträgt:

$$\sigma = (f - e) \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\frac{B}{2}-h}{\ell-a} = \frac{h}{b'} \quad \frac{1}{e} - \frac{1}{k} = \frac{1}{f_1} \quad e = \frac{k \cdot f_1}{f_1 + k}$$

$$\frac{h}{a-f} = \operatorname{tg} \alpha - A - \frac{r}{e} \quad \frac{1}{k} = 0.005 \quad \frac{1}{a-f} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{f_2}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{a-f} - \frac{\frac{B}{2}-h}{(\ell-a)h} = \frac{1}{f_2} \quad h = \frac{2Af_2(\ell-a)-Bf_2}{2(\ell-a-f_2)}$$

$$f = a - \frac{2Af_2(\ell-a)-Bf_2}{2A(\ell-a-f_2)} \quad A = \frac{0.005(f_1+k)}{f_1}$$

$$\frac{B}{2} = h + y \quad \text{wobei} \quad \alpha_{200} = \frac{z+\ell}{2} - \sqrt{z(f_2 - \frac{\ell}{2} - \frac{z}{4}) \ell (\frac{\ell}{4} - f_2)}$$

$$y = (\ell - \alpha_{200}) \cdot \operatorname{tg} \beta \quad z = \frac{f_1}{1 - \frac{f_1}{200-k}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{b'} \quad h = (\alpha_{200} - e) \operatorname{tg} \alpha \quad f_{200} = e$$

Zum "Einbau" des Keilmikrometers und den damit verbundenen Bildstörungen waren u.a. weitere Betrachtungen anzustellen.

**ÜBER DIE REDUKTION ASTRONOMISCHER BEOBEAHTUNGEN  
ZUM UNVERÄNDERLICHEN ERDPOL**

von Prof.Dr.techn.habil. A.A. ISOTOV, Moskau

Summary. The astronomical observations of longitudes and times are usually reduced to the conventional pole by the formula (10) without its term(11)which depends on the variations of the instant Greenwich meridian. The position of the Greenwich conventional meridian as the origin of the longitudes and times is changed with the using of the same formula for transition from one conventional pole to another. To avoid it the longitudes and times observations must be reduced to a new position of the conventional pole by formulae (13) or (17) which the Greenwich meridian variations are accounted in. In this case the ordinary formulae for reducing of the astronomical latitudes and azimuths remain unchanged.

Wenn die Präzession- und Nutationseinflüsse der Sonne und des Mondes beseitigt wären würde die Rotationsachse der Erde ihre unveränderliche Lage im Raume beibehalten. Weil aber die Rotationsachse mit der Trägheitsachse nicht zusammenfällt und die internen sowie besonders externen Erdmassen einschließlich Erdatmosphäre sich ständig verlagern, vollzieht die Erde selbst Schwingungen in bezug auf ihre Rotationsachse. Da sich die Lage der Pole auf der Erdoberfläche durch diese Erscheinung fortwährend ändert, wird die letztere Polbewegung genannt.

Die Polbewegung ändert ununterbrochen das System der Meridiane und Parallelen d.h. ruft Änderungen von Breiten, Längen und Azimuten der Punkte der Erdoberfläche hervor. Es soll hier bemerkt werden, daß als

astronomischer Meridian des gegebenen Punktes die durch die Lotlinie dieses Punktes parallel zur Rotationsachse der Erde verlaufende Ebene zu betrachten ist. Dabei wird der Meridian eines ausgewählten Punktes der Erdoberfläche als Nullmeridian angenommen. Zur Zeit wird der Meridian des Observatoriums von Greenwich als Ausgangsmeridian für die astronomische Längenzählung angenommen. Dementsprechend stellt die astronomische Länge eines Punktes den Winkel zwischen den Ebenen des astronomischen Meridians dieses Punktes und des Greenwicher Meridians dar.

Wegen der Polbewegung werden gewöhnlich die Begriffe des augenblicklichen Poles und des von verschiedenartigen Bewegungen freien mittleren Poles eingeführt. Vom Gesichtspunkt der Mechanik und besonders der Geophysik gesehen ist der Begriff "mittlerer Pol" seinem Wesen nach sehr kompliziert und nicht ganz eindeutig. Für die praktische Astronomie und Geodäsie kann aber statt des denkbaren mittleren Poles ein unveränderlicher Pol angenommen werden, dessen Lage durch die Rotationsachse der Erde zu einer bekannten Epoche in bezug auf die Lotrichtungen einiger (mindestens zweier) ausgewählter Punkte der Erdoberfläche bestimmt wird.

Die Ergebnisse vieljähriger Beobachtungen zeigen, daß der augenblickliche Pol eine spiralförmige periodische Kurve, deren Radiusvektor manchmal  $0^{\circ}4 - 0^{\circ}5$  des Großkreisbogens erreicht, um einen gewissen unbeweglichen Pol beschreibt. Um die gleichen Größen ändern sich auch die astronomischen Breiten der Punkte der Erdoberfläche, die Änderungen der Längen und Azimute können unter hohen Breiten noch beträchtlicher sein. Weil diese Änderungen nicht vernachlässigt werden können, sind die astronomischen Messungen auf eine einheitliche Epoche bzw. auf ein einheitliches System des unveränderlichen Poles zu reduzieren.

Obwohl die Reduktionsformeln für Breiten, Längen und Azimute allgemein bekannt sind, möchten wir jedoch zwecks Veranschaulichung einiger Überlegungen zu dieser Frage ihre einfache Ableitung unten darlegen. Infolge der Erdschwankungen ändert sich praktisch die Lage des astronomischen Zenites des Beobachtungspunktes in bezug auf die Fixsterne. Es ist

aber bequemer, bei der Ableitung der obengenannten Formeln anzunehmen, daß die Lage des Zenites auf der Himmelskugel unverändert bleibt, während die Lage des Pols sich ständig ändert.

Nehmen wir an, daß die Rotationsachse der Erde zur Epoche  $T_0$  die Himmelskugel im Punkt  $P_0$  schneidet und somit die ausgewählte Lage des unveränderlichen Pols bestimmt. Der Punkt  $G$  sei der Schnittpunkt der Lotrichtung in Greenwich mit der Himmelskugel zu derselben Epoche und stelle somit den astronomischen Zenit von Greenwich dar. Dann wird der Großkreis  $P_0GG_0$  der Himmelskugel der unveränderlichen Meridianebene von Greenwich entsprechen, von der die auf den unveränderlichen Pol bezogenen astronomischen Längen gezählt werden sollen.

Die augenblickliche Rotationsachse der Erde zu einem Zeitmoment  $T$  schneide die Himmelskugel im Punkt  $P$ , der den augenblicklichen Pol in diesem Zeitmoment darstellt. Dann wird der durch den astronomischen Zenit von Greenwich und den augenblicklichen Pol gehende Großkreis  $PGQ$  der augenblicklichen Meridianebene von Greenwich entsprechen, von der die beobachteten Längen eigentlich gezählt werden sollen. Die Lage des augenblicklichen Pols  $P$  in bezug auf den ausgewählten unveränderlichen Pol  $P_0$  definieren wir vorläufig durch den Radius-Vektor  $\mathbf{r}$  und durch den vom unveränderlichen Greenwicher Meridian gezählten Winkel  $\Theta_0$ . (Abb.1).

Nehmen wir weiter an, daß die durch den laufenden Punkt der Erdoberfläche gehende Lotrichtung die Himmelskugel im Punkt  $K$  schneidet. Die durch den Zenit des betreffenden Punktes und durch den unveränderlichen bzw. den augenblicklichen Pol gehenden Großkreise  $P_0KK_0$  und  $PKE$  werden die Spuren der Ebenen des unveränderlichen bzw. des augenblicklichen Meridians auf der Himmelskugel darstellen. Es ist augenfällig, daß der Zweikantwinkel zwischen dem unveränderlichen und dem augenblicklichen Meridian des betreffenden Punktes der von der Polbewegung verursachten Änderung des astronomischen Azimuts der Richtung  $KM$  der Größe nach gleich ist.

Wie aus dem sphärischen Dreieck  $KP_0P$  ersichtlich, sind die beob-

achten Breiten und Azimute mit den entsprechenden Größen im System des unveränderlichen Pols durch folgende strenge Relationen zu verbinden:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos \varpi + \cos \varphi_0 \sin \varpi \cos \psi_0$$

$$\sin(\alpha_0 - \alpha) = \sin \varpi \sin \psi_0 \sec \varphi_0 .$$

Mit Vernachlässigung der Quadrate der kleinen Größen des Radiusvektors des augenblicklichen Pols sowie der Änderungen der Breiten, Längen und Azimute erhalten wir mit einem hohen Genauigkeitsgrad:

$$\varphi_0 - \varphi = - \varpi \cos \psi_0 . \quad (1)$$

$$\alpha_0 - \alpha = \varpi \sin \psi_0 \sec \varphi \quad (2)$$

Im allgemeinen Fall wirkt die Polbewegung auf die Meridiane sämtlicher Punkte der Erdoberfläche einschließlich des Nullpunktes der Längen. Deshalb ist die Änderung der astronomischen Länge eines beliebigen Punktes der Änderung des Winkels zwischen dem astronomischen Meridian dieses Punktes und dem des Nullpunktes, d.h. Greenwich, gleich. Dementsprechend soll die durch Polbewegung entstandene Änderung der astronomischen Länge eines Punktes folgenderweise ausgedrückt werden:

$$\lambda_0 - \lambda = (\psi_0 - \psi) + (\theta_0 - \theta) . \quad (3)$$

Durch Berechnung des Dreiecks  $K P_0 P$  erhalten wir folgende strenge Formel:

$$\cos \psi = \cos \varphi_0 \cos(\alpha_0 - \alpha) - \sin \varphi_0 \sin(\alpha_0 - \alpha) \sin \psi_0 .$$

Daraus ergibt sich unter Vernachlässigung der Glieder 2. Ordnung:

$$\psi_0 - \psi = - \varpi \sin \psi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 . \quad (4)$$

Indem wir das Dreieck  $G P_0 P$  auf ähnliche Weise berechnen, erhalten wir endgültig:

$$\theta_0 - \theta = - \varpi \sin \theta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 . \quad (5)$$

Abb. 1

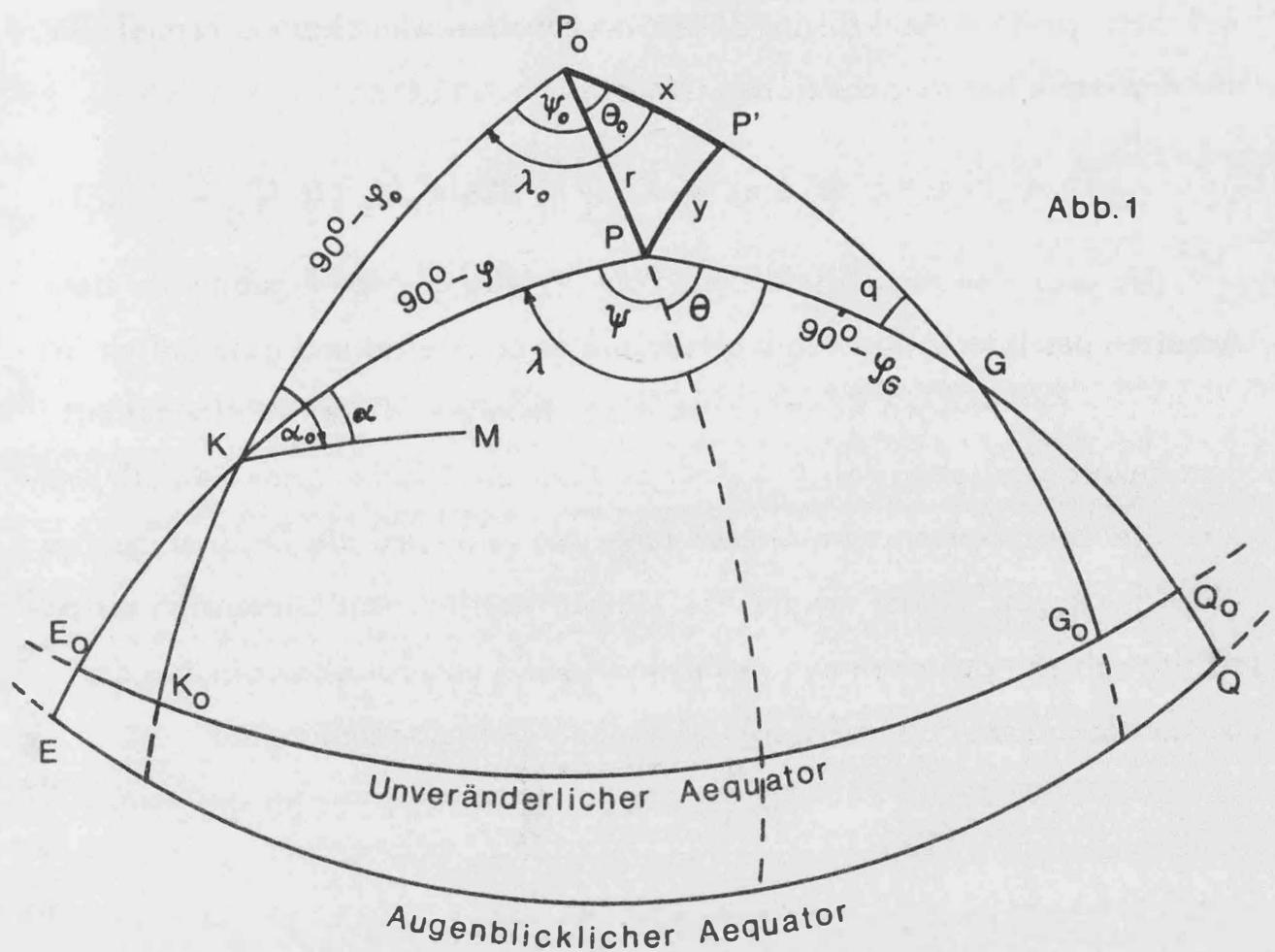
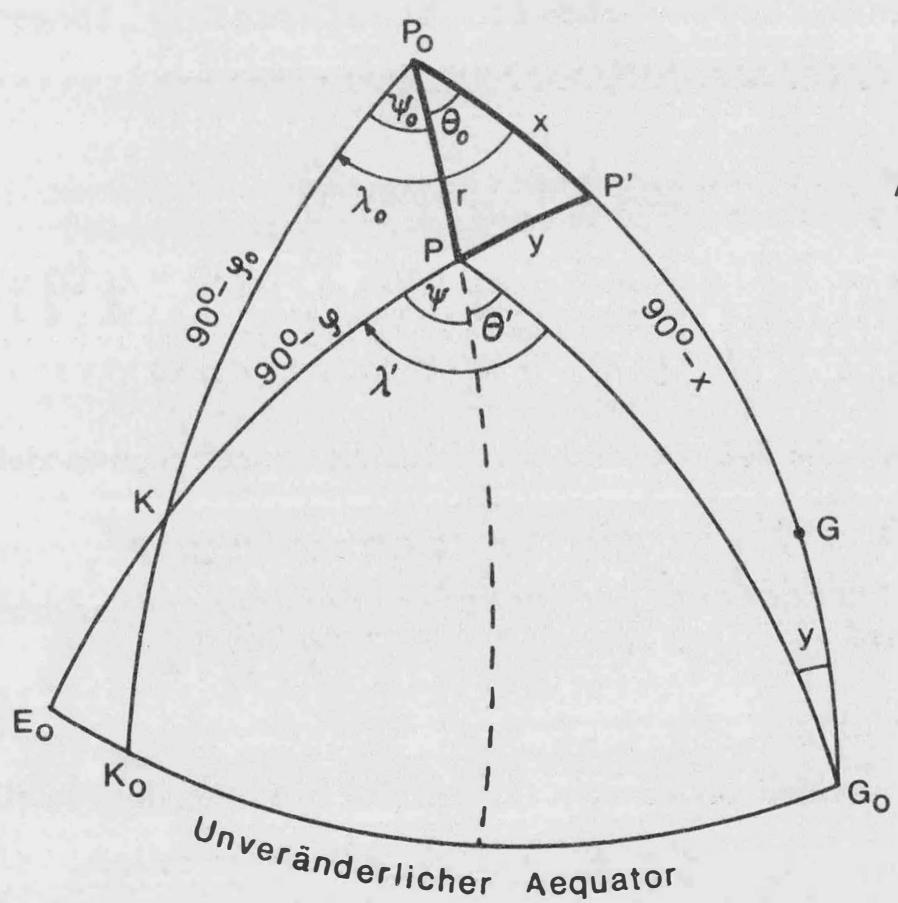


Abb. 2



Setzen wir (4) und (5) in (3) ein, so erhalten wir folgende Formel für die Änderung der astronomischen Längen:

$$\lambda_0 - \lambda = -\varpi \sin \psi_0 \operatorname{tg} \varphi - \varpi \sin \theta_0 \operatorname{tg} \varphi_G . \quad (6)$$

Die Lage des augenblicklichen Pols P wird aus den Ergebnissen der Arbeiten des Internationalen Breitendienstes abgeleitet und gewöhnlich in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem gegeben, dessen Nullpunkt mit dem unveränderlichen Pol  $P_0$  einer bestimmten Epoche zusammenfällt, während die Abszissenachse im Greenwicher Meridian und die Ordinatenachse  $90^\circ$  w.L. liegen. Dabei werden die Längen westlich von Greenwich als positiv erachtet. Zwischen den rechtwinkeligen - und Polarkoordinaten des augenblicklichen Pols existieren einfache Wechselbeziehungen:

$$x = \varpi \cos \theta_0$$

$$y = \varpi \sin \theta_0 .$$

Für die rechtwinkeligen Koordinaten nehmen die Formeln (1), (2) und (6) zur Reduktion beobachteter (augenblicklicher) Breiten  $\varphi$ , Längen  $\lambda$  und Azimute  $\alpha$  zum unveränderlichen Pol folgende Form an:

$$\psi_0 = \varphi - (x \cos \lambda + y \sin \lambda) \quad (7)$$

$$\lambda_0 = \lambda - (x \sin \lambda - y \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi - y \operatorname{tg} \varphi_G \quad (8)$$

$$\alpha_0 = \alpha + (x \sin \lambda - y \cos \lambda) \sec \varphi . \quad (9)$$

Für praktische Belange wird aber folgende Formel angewendet:

$$\lambda_0 = \lambda' - (x \sin \lambda - y \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi , \quad (10)$$

d.h. das Glied  $\delta \lambda = \lambda' - \lambda = -y \operatorname{tg} \varphi_G$  (11)

wird vernachlässigt.

Der Unterschied der Formeln (8) und (10) tritt besonders deutlich für Greenwich zutage, wo  $\varphi = \varphi_G$  und  $\lambda_0 = 0$  gelten sollen.

Nach (8) erhalten wir für Greenwich  $(\lambda_0 - \lambda)_G = 0$ , d.h. die augen-

blickliche Länge dieses Meridians ist auch gleich Null. Diese Formel setzt folglich voraus, daß die beobachteten Längen vom augenblicklichen Greenwicher Meridian gezählt werden. Indem wir die Formel (10) auf Greenwich anwenden, erhalten wir:

$$(\lambda_0 - \lambda')_G = +y \operatorname{tg} \varphi_G , \quad (12)$$

daraus folgt, daß die augenblickliche Länge von Greenwich in diesem Fall nicht gleich Null ist.

Das vernachlässigte Glied (11) der Formel (10), wie es aus der Beziehung (12) ersichtlich ist, drückt die durch Polbewegung entstandene Schwingung des augenblicklichen Greenwicher Meridians aus. Dieses Glied wäre nur dann gleich Null, wenn sich Greenwich als Neupunkt der astronomischen Längen auf dem Äquator befände. Deshalb ist die Anwendung der Formel (10) mit der Annahme gleichbedeutend, daß die augenblicklichen Längen vom augenblicklichen Meridian  $P_G$  des Schnittpunktes  $G$  des unveränderlichen Greenwicher Meridians  $P_G$  und des ebenfalls unveränderlichen Äquators  $E_G$  gezählt werden (Abb. 2).

Bei dieser Annahme drückt sich die durch Polbewegung entstandene Änderung der astronomischen Länge tatsächlich folgenderweise aus:

$$\lambda_0 - \lambda' = (\psi_0 - \psi) + (\theta_0 - \theta') .$$

Ohne die Einzelheiten anzuführen, erhalten wir aus dem Dreieck  $P_0 P G$  mit einem hohen Genauigkeitsgrad folgenden Ausdruck:

$$\theta_0 - \theta' = -x y + \frac{1}{2} y^2 \operatorname{cotg} \theta' .$$

Weil die rechte Seite dieser Gleichung immer verschwindend klein ist, gehen wir zu folgender üblicher Form über:

$$\lambda_0 - \lambda' = (\psi_0 - \psi) = -(x \sin \lambda - y \cos \lambda) \operatorname{tg} \psi .$$

Bei einer gegebenen Lage des unveränderlichen Pols bleibt das Glied (11) der Formel (10), das gewöhnlich vernachlässigt wird, zu jedem Zeitmo-

ment für alle Punkte der Erdoberfläche, einschließlich Greenwich, konstant. Es hat deshalb den Anschein, als ob die Vernachlässigung dieses Gliedes den Unterschied der auf das System des unveränderlichen Pols bezogenen Längen nicht ändere. Das ist natürlich nur für den Fall richtig, wenn die augenblicklichen Längen nicht vom Greenwich selbst, sondern vom imaginären Schnittpunkt des Greenwicher Meridians mit dem Äquator des unveränderlichen Systems gezählt werden. In diesem Fall aber ist die beobachtete Länge des betreffenden Punktes dem wirklichen Winkel zwischen dem astronomischen Meridian dieses Punktes und dem Greenwicher Meridian nicht gleich.

Die Annahme des obenerwähnten Punktes der Himmelskugel als Nullpunkt astronomischer Längen hebt formell die Notwendigkeit auf, kontinuierliche Schwankungen des augenblicklichen Greenwicher Meridians zu berücksichtigen. Dieser imaginäre Punkt stellt aber keinen wahren Zenit irgendeines bekannten und vermarkten Punktes der Erdoberfläche dar, auf dem die astronomischen Beobachtungen durchgeführt werden könnten. Seine Lage auf der Himmelskugel wird nur durch die Lage des unveränderlichen Pols bestimmt, dessen Auswahl nicht nur schwierig, sondern auch nicht eindeutig ist.

Die Ergebnisse der astronomischen Messungen wurden bekanntlich in verschiedenen Fällen oder in verschiedenen Zeitperioden zu verschiedenen unveränderlichen Polen reduziert. So sind, z.B. vom Internationalen Breitendienst und vom Internationalen Zeitdienst zu verschiedenen Perioden ihrer Tätigkeit verschiedene unveränderliche Pole benutzt worden. Sogar zu gleichen Epochen sind die von beiden Diensten angenommenen Pollagen nicht immer identisch.

Auf dem Gebiet der Astronomie und Geodäsie war schon lange die Tendenz vorhanden, einen einheitlichen unveränderlichen Pol anzunehmen, der den denkbaren mittleren Pol ersetzen und als praktische Grundlage für die Reduktion astronomischer Messungen zu einem einheitlichen System dienen könnte. Gerade diese Tendenz wurde in Beschlüssen des XIII. Kongresses der Internationalen Astronomischen Union sowie der XIV. Assemblée der

Internationalen Assoziation für Geodäsie anerkannt. Laut diesen Beschlüssen wurde die Lage des unveränderlichen Pols durch gemittelte Breiten von den fünf Stationen des Internationalen Breitendienstes für die Epoche 1903 bestimmt und als "der Internationale Konventionelle Nullpunkt" (Origine Conventionnelle Internationale) bezeichnet.

Trotz einiger Mängel seiner Bestimmung definiert der Internationale Konventionelle Nullpunkt eindeutig die Lage des unveränderlichen Pols. Deshalb muß man sich damit zufriedengeben, daß dieser Nullpunkt eine annehmbare Grundlage für die Reduktion astronomischer Messungen zu einem einheitlichen System darstellt. Zu diesem System sollen natürlich nicht nur die neueren, sondern auch die auf andere Systeme bezogenen älteren Messungen reduziert werden.

Die Verfahren der Reduktion astronomischer Beobachtungen aus den älteren Systemen zum konventionellen unveränderlichen Pol brauchen keine zusätzliche Erläuterungen. Dafür muß man nur die neuen Koordinaten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  des augenblicklichen Pols zur Beobachtungszeit in bezug auf den neuen unveränderlichen Pol  $\bar{P}_o$  haben. Dann können nach den oben angeführten Formeln die Korrekturen der astronomischen Messungen wegen der Polbewegung im neuen System leicht berechnet werden. In vielen Fällen kann es sich aber praktischer erweisen, die den Koordinatendifferenzen  $\bar{x} - x$  und  $\bar{y} - y$  des augenblicklichen Pols im neuen und alten System entsprechenden Verbesserungen unmittelbar an die auf ein älteres System reduzierten astronomischen Breiten  $\bar{\varphi}_o$ , Längen  $\bar{\lambda}_o$  und Azimute  $\bar{\alpha}_o$  anzubringen. Diese beiden Verfahren sollen bei ihrer richtigen Anwendung natürlich die gleichen reduzierten Breiten  $\bar{\varphi}_o$ , Längen  $\bar{\lambda}_o$  und Azimute  $\bar{\alpha}_o$  im neuen System geben. Bei jedem dieser Verfahren erhebt sich aber die Frage, welche der Formeln (8) oder (10) für diese Zwecke benutzt werden soll.

Nach (8) wird die aufs neue System reduzierte astronomische Länge durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\bar{\lambda}_o = \lambda - (\bar{x} \sin \lambda - \bar{y} \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi - \bar{y} \operatorname{tg} \varphi_G =$$

$$= \lambda_0 - [(\bar{x} - x) \sin \lambda - (\bar{y} - y) \cos \lambda] \operatorname{tg} \varphi - (\bar{y} - y) \operatorname{tg} \varphi_G. \quad (13)$$

Auf Grund von (10) erhalten wir für dieselbe Länge im neuen System folgende Formel:

$$\begin{aligned} \lambda'_0 &= \lambda' - (\bar{x} \sin \lambda - \bar{y} \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \lambda_0 - [(\bar{x} - x) \sin \lambda - (\bar{y} - y) \cos \lambda] \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Es ist leicht zu erkennen, daß sich die auf das neue System nach (14) reduzierte Länge von der nach (13) reduzierten Länge um die Größe:

$$\bar{\lambda}_0 - \lambda'_0 = \lambda - \lambda' - \bar{y} \operatorname{tg} \varphi_G = -(\bar{y} - y) \operatorname{tg} \varphi_G. \quad (15)$$

unterscheidet. Diese Größe ist zu jedem Zeitmoment für alle Punkte der Erdoberfläche einschließlich Greenwich konstant. Deshalb werden die Längenunterschiede im neuen System des unveränderlichen Pols durch Anwendung von (14) nicht verfälscht. Es kann aber gezeigt werden, daß der Längennullpunkt in diesem Fall um die Größe (15) verschoben wird.

Der Unterschied der Formeln (13) und (14) wird besonders augenfällig und verständlich, wenn man sie auf Greenwich anwendet. Im System eines beliebigen unveränderlichen Pols soll die Länge von Greenwich als die des Längennullpunktes natürlich gleich Null sein. Die Formel (13) wird dieser Bedingung gerecht, aber für die Formel (14) ist es nicht der Fall. Der Unterschied der Formeln (13) und (14) ist eigentlich nur die Folge des Unterschiedes von (8) und (10), in denen die beobachtete Länge von verschiedenen Nullpunkten gezählt wird. So wird in (8) die augenblickliche Länge vom augenblicklichen eigentlichen Greenwich Meridian im Beobachtungszeitpunkt gezählt. Nach (10) aber dient der Schnittpunkt des Greenwich Meridians und des Äquators als Nullpunkt im System des ausgewählten unveränderlichen Pols (Abb. 2).

Sind die beobachteten Längen aufs ältere System des unveränderlichen Pols nach (8) reduziert, so sollen sie beim Übergang zum neuen System vor

allem wegen des Längenunterschiedes der Nullpunkte dieser Systeme korrigiert werden.

Wie aus (11) ersichtlich, sind die beobachteten Längen  $\lambda'$  und  $\lambda''$  eines beliebigen Punktes im alten und im neuen System mit seiner vom augenblicklichen Greenwicher Meridian ab gezählten Länge  $\lambda$  durch folgende Beziehungen verbunden:

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda - y \operatorname{tg} \varphi_G \\ \lambda'' &= \lambda - \bar{y} \operatorname{tg} \varphi_G.\end{aligned}$$

Deshalb ergibt sich für die Reduktion beobachteter Längen aus dem älteren System des unveränderlichen Pols ins neue die folgende Formel:

$$\lambda'' = \lambda' - (\bar{y} - y) \operatorname{tg} \varphi_G. \quad (16)$$

Danach soll die beobachtete Länge im neuen System wegen Schwankungen des augenblicklichen Pols nach der üblichen Formel:

$$\lambda''_o = \lambda'' - (\bar{x} \sin \lambda - \bar{y} \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi$$

korrigiert werden. Daraus erhalten wir unter Berücksichtigung von (10) und (16):

$$\begin{aligned}\lambda''_o &= \lambda' - (\bar{x} \sin \lambda - \bar{y} \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi - (\bar{y} - y) \operatorname{tg} \varphi_G = \\ &= \lambda_o - [(\bar{x} - x) \sin \lambda - (\bar{y} - y) \cos \lambda] \operatorname{tg} \varphi - (\bar{y} - y) \operatorname{tg} \varphi_G. \quad (17)\end{aligned}$$

Ohne auf weitere Erörterungen einzugehen, ist man darüber im klaren, daß die Formel (17) mit der Formel (13) identisch ist und die Formel (14) den Längennullpunkt wirklich um die Größe (15) verschiebt.

Die Bestimmung der astronomischen Länge besteht gewöhnlich aus dem Vergleich der beobachteten Momente der Zeitsignale mit den mittleren Momenten ihrer Sendung. Diese mittleren Momente werden aus astronomischen Beobachtungen auf den Stationen des Zeitdienstes erhalten und in den monatlichen Bulletins veröffentlicht. Früher wurden die mittleren Momente im

System des augenblicklichen Pols gegeben, aber seit einiger Zeit werden sie auf das System des unveränderlichen Pols reduziert.

Für die Reduktion der mittleren Momente der Zeitzeichensendung zum System des ausgewählten Pols wird eine der Formel (10) ähnliche Gleichung angewandt, so daß der Schnittpunkt des Greenwicher Meridians und des Äquators dieses Systems als Zeitnullpunkt dient. Dadurch kann in einigen Fällen die Notwendigkeit auftreten, die mittleren Momente der Zeitzeichensendung aus einem älteren System auf das neue System des unveränderlichen Pols zu reduzieren. Es ist klar, daß man für diese Zwecke etwa die Formeln (13), (16) und (17) anwendet, indem man darin die Längen durch entsprechende Zeitmomente ersetzt und die Koordinaten des augenblicklichen Pols in Zeiteinheiten ausdrückt.

Zum Schluß möchte ich bemerken, daß die Ersetzung der Formel (8) durch (10) ohne (11) auf den Wunsch zurückzuführen ist, die durch Polbewegung entstehenden Schwankungen des augenblicklichen Greenwicher Meridians unberücksichtigt zu lassen. In diesem Fall stellt die Station Greenwich nur den Nominalnullpunkt der beobachteten Längen bzw. der Zeitmomente dar, ihr wahrer Nullpunkt aber liegt im Schnittpunkt des Greenwicher Meridians und des Äquators im angenommenen System des unveränderlichen Pols. Dieser Umstand bringt keinen besonderen praktischen Vorteil mit sich und kann sogar beim Übergang von einem unveränderlichen Pol zum anderen Mißverständnisse herbeiführen. Wie die Formeln (13), (16) und (17) zeigen, ergibt sich beim Übergang von einem System des unveränderlichen Pols zum anderen zwangsläufig die Notwendigkeit, die Schwankungen des augenblicklichen Greenwicher Meridians in bezug auf jedes dieser Systeme zu berücksichtigen. Deshalb wäre es wünschenswert, bei sämtlichen astronomischen Zeit- und Längenbestimmungen sowie bei der Reduktion der Ergebnisse auf ein einheitliches System die Station Greenwich nicht nur nominell sondern auch tatsächlich als Nullpunkt anzunehmen.

Prof. Dr hab. Czesław Kamela

**" Neue Reduktionsmodifizierungen der beobachteten  
Schwerewerte für Geoidbestimmung "**

Bei der Bestimmung des Geoides aus Schwerkraftmessungen nach der Formel von Stokes muss man den Wert der gemessenen Beschleunigungen der Schwerkraft auf der Oberfläche des Geoides so reduziert haben, damit bei dieser Reduktion keine Verlegung des Geoides vorkommt.

Unter allen bekannten Reduktionsmethoden erfüllt nur die Reduktionsmethode von Rudzki diese Bedingung.

Die Reduktionsmethode von Rudzki kennen wir als:

- a/ Methode von Rudzki für eine Kugel, die sogenannte Inversionsmethode und
- b/ eine genauere Reduktionsmethode von Rudzki bei der er auf die ellipsoidische Gestalt des Geoides Rücksicht nimmt, wobei man sich die Funktionen von Lamé bedient.

Indem man durch  $G_{\text{beob.}}$  - den Wert der gemessenen Beschleunigung der Schwerkraft im Punkte P und in der Höhe H bezeichnet und durch  $G_{\text{red.}}$  - den Wert  $G_{\text{beob.}}$  nach der Reduktionsmethode von Rudzki reduziert und übertragen auf das Geoid, weiter durch A das Potential der im Außenraum des Geoides gelegenen Massen und durch J - das Potential der Massenbelegung auf dem Ellipsoid, durch V - die Kraftfunktion des Erdkörpers vor der Massenverlegung, durch W - die Kraftfunktion der Erde nach der Massenveränderung so ist

$$W = V - A + J$$

Weil aber

$$-\frac{\partial W}{\partial z} = G_{\text{red.}} ; \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = G_{\text{beob.}}$$

und

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \Delta G_{1\text{Top.}} ; \quad \frac{\partial J}{\partial z} = \Delta G_{2\text{Inver.}}$$

erhält man

$$G_{\text{red.}} = G_{\text{beob.}} + \Delta G_{\text{Faye}} - \Delta G_{1\text{Top.}} + \Delta G_{2\text{Inver.}}$$

Bei der Berechnung von  $\Delta G_{1\text{Top.}}$  und  $\Delta G_{2\text{Inver.}}$

kann man sich der Hayford-Tabellen bedienen, die zu den Berechnungen der isostatischen Reduktionen dient ; es muss dann aber die Einteilung des Geländes in Zonen laut Hayford beibehalten werden.

Unter anderen Reduktionsmethoden deformiert Faye's Freiluftreduktionsmethode das Geoid amgeringsten.

Wie die Forschungen von Rudzki /1907/ bei den Berechnungen der Reduktion für die Punkte : Kraków, San Francisco und Debra Dun, deren Anomalien 2,5mgal, 0,6mgal und 22,2mgal betrugen, erwiesen haben, wichen diesen Werte gering von Faye's Anomalien ab.

Ebenso haben es die Forschungen von B.Kladivo /1940/ sowie weitere von S.W.Gromow /1952/ , der Rudzki's Anomalien für 85 Punkte des Europäischen Teils der Sowjetunion berechnet hat, bewiesen.

Es muss auch erwähnt werden, dass Prof. Hopfner und Prof. Tengström die Anwendung von Rudzki's Anomalien bei der Bestimmung des Geoides empfohlen hat.

In Polen befassen sich seit Jahren mit dem Problem der Reduktionen von Rudzki: Doz.Dr hab. E.Bilski, Dr Ing. J.Cieślak, Prof.Dr hab.Cz.Kamela, Dipl.Ing. J.Bak u.a.

Forschungen auf dem Gebiet von Polen haben bestätigt, dass Rudzki's Anomalien sehr gering von denen von Faye abweichen, sie haben eher bewiesen, dass der Wert  $/ - \Delta G_{1,\text{Top}} + \Delta G_{2,\text{Inver.}}$  / sich linear sogar für ziemlich entfernte Punkte ändert.

Die Tatsache, dass sich die Differenz zwischen den Anomalien von Rudzki und denen der Freiluftmethoden von Faye linear für ziemlich weit entfernte Punkte d. h. auf ziemlich grossen Gebieten ändert kann für eine Modifizierung der Berechnung von Rudzki's Anomalien ausgenutzt werden. Da praktisch Faye's Anomalien für alle Punkte der Erdkugel berechnet sind / bzw. leicht berechnet werden können/ wird vorgeschlagen. Punkte zu der Berechnungen von Rudzki's Anomalien so dicht zu wählen, damit auf einfache Weise alle Punkte von Faye's Anomalien auf Anomalien von Rudzki umgerechnet werden können.

Wie schon bemerkt wurde soll die Umrechnung einfach /nicht kompliziert/ sein, also eine einfache lineare Interpolation sein.

Auf diese Weise könnte man in kurzer Zeit für die ganze Erdkugel eine gute Karte von Rudzki's Anomalien haben, die für die Geoidsbestimmung ausgenutzt werden könnte.

Es wird betont, dass die Dichte der gewählten gemeinsamen Punkte auf denen gleichzeitig die Anomalien von Rudzki und Faye bezeichnet wurden von den Differenzen zwischen diesen Anomalien abhängig sein werden.

Berücksichtigt man diese Differenz der Anomalien, so genügt bei einem Gebiet wie Polen / grösser als 300 000 km<sup>2</sup> / eine Anzahl unter Hundert /ca 50 - 60 / von gemeinsam verteilten Punkten.

Es wird darauf hingewiesen, dass anstelle einer linearen Interpolation, man auf der Karte Linien gleicher Differenzen aufzeichnen kann, und indem man sich dieser Karte bedient, die Differenz einer jeden anderen Punktes bezeichnen.

Wie hieraus zu ersehen ist, kann man anhand einer so modifizierter Methode von Rudzki in kurzer Zeit eine Karte von Rudzki's Anomalien für die ganze Erdoberfläche erhalten, was die Bestimmung des Geoids auf klasische Weise erlaubt.

Diese Resultate können mit den Resultaten verglichen werden, die durch Satellitenbeobachtungen erhalten worden sind und weiter können sie mit den Resultaten der Berechnungen von Prof.Dr K.Ledersteger verglichen werden die er bei der Benutzung der Theorie des Gleichgewichtes von Sphäroidalfiguren erhalten hat.

Man hat somit noch eine Kontrolle und es kann gleichzeitig überprüft werden ob diese Methode die Erwartungen der Geodäten der letzten 65 Jahren erfüllt.

# Zur statischischen Beschreibung eines skalaren Feldes auf der Kugeloberfläche

von Heinz Kautzleben, Potsdam

## Zusammenfassung

Auf der Kugeloberfläche definierte empirische Funktionen erfordern zu ihrer besseren Beschreibung statistische Methoden. Im Beitrag wird die Beschreibung mit Hilfe der Erwartung und der Korrelationsfunktion behandelt, wobei vor allem auf die Reihendarstellung mit Kugelflächenfunktionen eingegangen wird. Bei der Beschreibung einer homogenen und isotropen Zufallsfunktion auf der Kugeloberfläche erweisen sich die Kugelflächenfunktionen und die auf ihnen aufbauende Reihendarstellung als besonders günstig.

## Zufallsfunktionen und ihre statistische Beschreibung

In allen Geowissenschaften kommt der Kugel als ausgezeichneter Approximation an die wirkliche Erdfigur eine fundamentale Bedeutung zu. Demzufolge bezieht man auch die Beschreibung und mathematische Darstellung von Feldfunktionen häufig auf die Kugeloberfläche. In allen Handbüchern und Lehrbüchern wird dieser Aufgabe deshalb breiter Raum eingeräumt (vgl. z. B. den ausgezeichneten Artikel von K. Ledersteger [1]).

Bei der Beschreibung empirischer Funktionen muß stets dem statistischen Charakter der Beobachtungen Rechnung getragen werden. Das erfordert eine Erweiterung der allgemein bekannten Methoden zur Beschreibung gewöhnlicher Funktionen in Richtung auf eine statistische Beschreibung. Im vorliegenden Beitrag wird eine solche Erweiterung für die Beschreibung eines skalaren Feldes auf einer Kugeloberfläche beschrieben.

Es werden dabei die Methoden zur statistischen Beschreibung stetiger Felder angewendet, die insbesondere in der statistischen Theorie der Turbulenz entwickelt worden sind (siehe z. B. [2]). Ähnliche Untersuchungen sind bereits früher von MORITZ [3] u.a. vorgelegt worden. Die vorliegenden Ergebnisse sollen auf einige bisher nicht angesprochene Zusammenhänge aufmerksam machen.

Die statistische Beschreibung stetiger Felder beruht auf der Theorie der Zufallsfunktionen (siehe z.B. [4]). Als Zufallsfunktion bezeichnet man dabei eine Funktion, die man als Element einer statistischen Gesamtheit von gewöhnlichen Funktionen auffassen kann. Für die Gesamtheit dieser Funktionen muß man bei einer vollständigen Beschreibung ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, was praktisch jedoch nicht realisierbar ist. Man beschränkt sich deshalb meist auf die Angabe der Momente 1. und 2. Ordnung der Verteilung, d.h. auf eine Beschreibung durch die mathematische Erwartung und die Korrelationsfunktion der Zufallsfunktion. Wenn die Elemente der Gesamtheit gewöhnliche Ortsfunktionen sind, sind auch die Erwartung und die Korrelationsfunktion gewöhnliche Ortsfunktionen.

In diesem Beitrag bezeichnen  $E(r)$  die Zufallsfunktion,  $e(r)$  eine ihrer Realisierungen,  $M[E(r)]$  ihre Erwartung und  $K_E(r, r') = M[(E(r) - M[E(r)]) \cdot (E(r') - M[E(r')])]$  ihre Korrelationsfunktion.  $M$  bezeichnet das statistische Mittel. Die Erwartung  $M[E(r)]$  beschreibt stets den mittleren Verlauf der Zufallsfunktion. Die Korrelationsfunktion  $K_E(r, r')$  bildet ein Maß für den inneren Zusammenhang und Schwankungscharakter der Zufallsfunktion. Speziell liefert  $K_E(r, r'=r) = D[E(r)]$  die Dispersion der Zufallsfunktion, d.h. ein Maß für die Streuung ihrer Realisierungen um ihre Erwartung.

Unter gewissen Voraussetzungen treten beträchtliche Erleichterungen im Formalismus der statistischen Beschreibung ein. Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer skalaren Zufallsfunktion in jedem beliebigen System von Beobachtungspunkten  $r_1, \dots, r_N$  gegenüber Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen des Systems der Beobachtungspunkte invariant ist, nennt man diese Zufallsfunktion homogen und isotrop. Die Erwartung ist in diesem Falle eine Konstante, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null annehmen kann. Die Korrelationsfunktion hängt dann nur vom Abstand der beiden Punkte  $r$  und  $r'$  ab. Für die praktische Ausführung der statistischen Analyse besitzen diese homogenen und isotropen Funktionen eine große Bedeutung, da bei ihnen die Erwartung und die Korrelationsfunktion aus einer einzigen Realisierung (d.h. einmaligen Beobachtung der Zufallsfunktion) durch einfache Mittelbildung über ihre Werte für alle Parameterwerte berechnet werden können. In der praktischen Anwendung zeigt sich aber auch, daß man viele empirische Funktionen als einfache Überlagerung einer gewöhnlichen Ortsfunktion mit einer homogenen und isotropen Zufallsfunktion ansehen kann.

Im weiteren sollen die Beobachtungspunkte  $r$  stets auf der Kugeloberfläche liegen, so daß sie durch die normalen Kugelkoordinaten  $\vartheta$  (Poldistanz) und  $\lambda$  (Länge) definiert werden können. Alle Bezeichnungen lassen sich dann sofort übertragen.

Wenn die Zufallsfunktion als homogen und isotrop angesehen werden kann, ist ihre Erwartung über die gesamte Kugeloberfläche gleich Null und ist die Korrelationsfunktion nur von der sphärischen Entfernung  $\tau$  der beiden Punkte  $(\vartheta, \lambda)$  und  $(\vartheta', \lambda')$  abhängig.

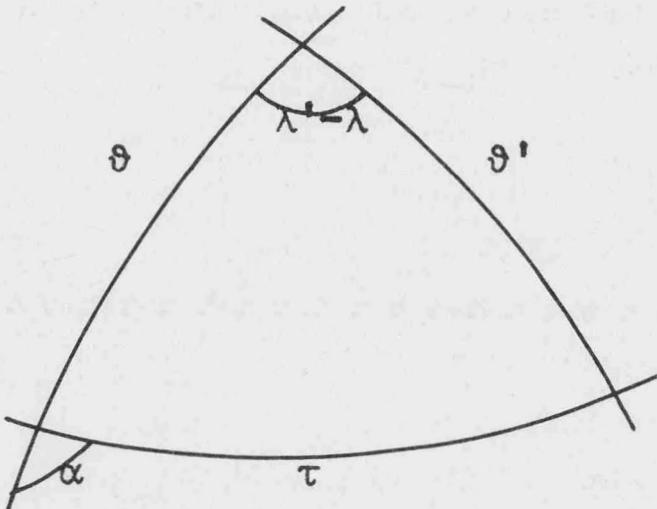


Abb. 1

Dabei wird  $\tau$  einfach durch

$$(1) \quad \cos \tau = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\lambda - \lambda')$$

bestimmt. Die Erwartung ergibt sich dann einfach als Mittelwert der Realisierung  $e(\vartheta, \lambda)$  über die Kugeloberfläche, d. h. als

$$(2) \quad M[E(\vartheta, \lambda)] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e(\vartheta, \lambda) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 0,$$

während sich die Korrelationsfunktion durch den Mittelwert

$$(3) \quad K_E(\vartheta, \lambda, \vartheta', \lambda') = K_E(\tau) =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e(\vartheta, \lambda) \cdot e(\vartheta', \lambda') d\alpha \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$$

darstellen lässt. Die Beziehung zwischen  $\vartheta$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta'$ ,  $\lambda'$ ,  $\tau$  und  $\alpha$  wird dabei durch die Abb. 1 vermittelt. Es ist also der Mittelwert der Produkte des Wertes der Realisierung am Punkt  $(\vartheta, \lambda)$  mit den Werten der Realisierung an den Punkten  $(\vartheta', \lambda')$ , die von  $(\vartheta, \lambda)$  um  $\tau$  entfernt sind, zu bilden. Anschließend sind die Mittelwerte über die Kugeloberfläche zu mitteln.

Reihenentwicklung einer Zufallsfunktion nach  
Kugelflächenfunktionen

---

Man kann eine Zufallsfunktion, die auf der Kugeloberfläche definiert ist, wie eine gewöhnliche Ortsfunktion in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen entwickeln. Man erhält dann die im Mittel konvergente Reihe

$$(4) \quad E(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\vartheta),$$

in der allerdings die Koeffizienten  $A_n^m$ ,  $B_n^m$  Zufallsgrößen sind. Sie werden jedoch durch die bekannten Formeln (z. B. [5])

$$(5) \quad \begin{Bmatrix} A_n^m \\ B_n^m \end{Bmatrix} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(\vartheta, \lambda) P_n^m(\vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$$

bestimmt. Hierbei werden die zugeordneten Legendre-schen Polynome  $P_n^m(\vartheta)$  in der Normierung von Adolf Schmidt [6] verwendet, so daß für die Kugelflächenfunktionen die Orthogonalitätsrelationen in der Form

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n^m(\vartheta) \cos m\lambda P_{n'}^{m'}(\vartheta) \sin m'\lambda \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 0$$

für alle  $m, m', n'$ ;

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n^m(\vartheta) P_{n'}^{m'}(\vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda & \cos m'\lambda \\ \sin m\lambda & \sin m'\lambda \end{Bmatrix} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = \\ & = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \frac{4}{2n+1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1-\delta_{mo} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

mit  $\delta_{ij}$  als Kronecker-Symbol gelten.

Aus den statistischen Kenngrößen des Zufallsfeldes kann man direkt nach (5) entsprechende Kenngrößen für die Koeffizienten  $A_n^m$ ,  $B_n^m$  ableiten, wenn man die Ge-

setze für die Integration von Zufallsgrößen [4] beachtet. Die Ausdrücke für die Erwartungswerte  $M[A_n^m]$  und  $M[B_n^m]$  sind sofort ersichtlich. Der Korrelationsfunktion entspricht bei den Koeffizienten dagegen eine Korrelationsmatrix, deren Elemente sich nach Formeln der Form

$$(7) \quad K_E [A_n^m, A_{n'}^{m'}] = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{2n'+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K_E (\vartheta, \lambda, \vartheta', \lambda') P_n^m(\vartheta) P_{n'}^{m'}(\vartheta') \cos m\lambda \cos m'\lambda'.$$

$$\sin \vartheta d\vartheta d\lambda \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'$$

usw. bestimmen lassen.

Wenn die Zufallsfunktion homogen und isotrop ist, erreicht man wesentliche Vereinfachungen in allen diesen Ausdrücken. Es ist sofort klar, daß dann

$$(8) \quad M[A_n^m] = M[B_n^m] = 0$$

für alle  $m$  und  $n$  gilt. Die Ausdrücke (7) für die Korrelationsmomente der Koeffizienten kann man umformen, wenn man die Koordinaten  $\tau$  und  $\alpha$  entsprechend der Abb. 1 anstelle von  $\vartheta'$  und  $\lambda'$  einführt. Das Flächenelement  $\sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'$  ist dann einfach durch  $\sin \tau d\tau d\alpha$  zu ersetzen. Für die Transformation der Kugelflächenfunktionen stehen die Formeln

$$(9) \quad P_{n'}^{m'}(\vartheta') \cos m'\lambda' = \sum_{p=0}^{n'} [A_n^{p,m'}(\vartheta) \cos m'\lambda \cos p\alpha - B_n^{p,m'}(\vartheta) \sin m'\lambda \sin p\alpha] P_n^p(\alpha)$$

$$P_{n'}^{m'}(\vartheta') \sin m'\lambda' = \sum_{p=0}^{n'} [A_n^{p,m'}(\vartheta) \sin m'\lambda \cos p\alpha + B_n^{p,m'}(\vartheta) \cos m'\lambda \sin p\alpha] P_n^p(\alpha)$$

mit  $A_n^{p,m}(\vartheta)$  und  $B_n^{p,m}$  als bekannte Funktionen von  $\vartheta$  zur Verfügung [5].

Weiter ist in (7) zu beachten, daß jetzt

$$(10) \quad K_E(\vartheta, \lambda; \vartheta', \lambda') = K_E(\tau \text{ allein})$$

gilt. Zur Auswertung der resultierenden Integrale muß man die Identitäten

$$(11) \quad A_n^{o,m'}(\vartheta) = P_n^{m'}(\vartheta), \quad B_n^{o,m'}(\vartheta) = 0$$

und die Orthogonalitätsrelationen (6) beachten. Damit erhält man für die Korrelationsmomente der Koeffizienten  $A_n^m$ ,  $B_n^m$  die Ausdrücke

$$(12) \quad K_E\left[A_n^m, A_{n'}^{m'}\right] = K_E\left[B_n^m, B_{n'}^{m'}\right] = \delta_{nn'}, \quad \delta_{mm}, \quad D_E\left[A_n^o\right], \\ K_E\left[A_n^m, B_{n'}^{m'}\right] = K_E\left[B_n^m, A_{n'}^{m'}\right] = 0 \\ \text{für alle } m, m', n, n'.$$

Hierbei steht  $D_E\left[A_n^o\right]$  für

$$(13) \quad D_E\left[A_n^o\right] = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi K_E(\tau) B_n^o(\tau) \sin \tau d\tau$$

und bezeichnet die für alle Koeffizienten  $A_n^m$ ,  $B_n^m$  mit gleichem Index  $n$  gleiche Dispersion. Für eine homogene und isotrope Zufallsfunktion auf der Kugeloberfläche sind demnach die Korrelationsmomente der Koeffizienten ihrer Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen nicht korreliert.

Man kann auch umgekehrt für die Erwartung und die Korrelationsfunktion einer Zufallsfunktion Reihenentwicklungen nach Kugelflächenfunktionen angeben, in denen die Erwartungswerte bzw. die Korrelationsmomente der Koeffizienten in der entsprechenden Reihenentwicklung der Zufallsfunktion selbst auftreten. Die Reihe für die Erwartung ist sofort ersichtlich. Für die Korrelationsfunktion erhält man im allgemeinen Fall

$$(14) \quad K_E(\vartheta, \lambda; \vartheta', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} K_E\left[A_n^m, A_{n'}^{m'}\right] \cos m\lambda \cos m'\lambda' + \dots \\ + K_E\left[B_n^m, B_{n'}^{m'}\right] \sin m\lambda \sin m'\lambda' \cdot P_n^m(\vartheta) P_{n'}^{m'}(\vartheta').$$

Daraus wird im Fall einer homogenen und isotropen Zufallsfunktion

$$(15) \quad K_E(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_E\left[A_n^0\right] P_n^0(\tau)$$

wegen (12) und der Gültigkeit des Additionstheorems der Kugelflächenfunktionen. Die Reihenentwicklung der Korrelationsfunktion führt demnach sofort auf die Dispersionen der Koeffizienten in der Reihenentwicklung der Zufallsfunktion selbst.

### Kanonische Reihenentwicklung

Reihenentwicklungen werden gewöhnlich angewandt, um eine überschaubare analytische Darstellung für eine komplizierte Funktion zu erhalten. Der Vorteil liegt jedoch vor allem darin, daß man bei hinreichend rascher Konvergenz schon eine hinreichend gute Näherungsweise Darstellung erhält, wenn man die Reihe nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht. Man sollte deshalb anstreben, solche Systeme von Koordinatenfunktionen als Grundlage der Reihenentwicklung zu wählen, die die schnellste Konvergenz gewährleisten. An erster Stelle stehen dabei natürlich die jeweils möglichen Systeme von Orthogonalfunktionen. Bei Reihenentwicklungen von Zufallsfunktionen tritt als weiterer Gesichtspunkt hinzu, solche Koordinatenfunktionen zu finden, bei denen die Entwicklungskoeffizienten nicht korreliert sind. Probleme dieser Art bei der Reihen-

darstellung von Zufallsfunktionen konnten von sowjetischen Mathematikern (vgl. [4]) gelöst werden. Dabei zeigt sich, daß die beiden Forderungen nach möglichst einfachen Reihenentwicklungen mit nicht-korrelierenden Koeffizienten bzw. nach Entwicklungen mit schnellster Konvergenz auf dasselbe Funktionssystem führen. Man nennt solche Reihenentwicklungen "kanonisch" und die entsprechenden Koordinatenfunktionen "natürliche Orthogonalfunktionen".

Im vorliegenden Fall einer Zufallsfunktion auf der Kugeloberfläche konnte in Anlehnung an die allgemeinen Beweisführungen in [4] gezeigt werden [7], daß die Kugelflächenfunktionen die natürlichen Orthogonalfunktionen sind und die entsprechende Reihenentwicklung kanonisch ist, wenn die Zufallsfunktion homogen und isotrop ist.

Die Entwicklung einer homogenen und isotropen Zufallsfunktion auf der Kugeloberfläche nach Kugelflächenfunktionen liefert demnach eine Reihe, die von allen möglichen Reihenentwicklungen die schnellste Konvergenz besitzt.

Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß die hier angeprochenen Eigenschaften der Kugelfunktionen einen neuen Zugang zur Theorie der Kugelfunktionen eröffnet, der vor allem für praktische Aufgaben bedeutungsvoll sein sollte.

Literatur:

- [1] K. Ledersteger: Astronomische und physikalische Geodäsie, Band V des Handbuchs der Vermessungskunde von Jordan/Eggert/Kneißl, 10. Aufl., Stuttgart 1957/1969
- [2] A. M. Obuchow: Statistische Beschreibung stetiger Felder. Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz. Berlin 1958
- [3] H. Moritz: An Extension of Error Theory with Application to Spherical Harmonics Ann. Acad. Sci. Finn., Ser. A, III, Geolog.-Geograph. No. 75, Helsinki 1965
- [4] V. S. Pugačev: Teorija slučajnyh funkcij i ee primenenia k zadačam avtomatičeskogo upravlenija. Moskva 1962
- [5] H. Kautzleben: Kugelfunktionen, Ergänzungsband zu Band I des Handbuches Geomagnetismus und Aeronomie, herausgeg. von G. Fanselau, Leipzig 1965
- [6] Ad. Schmidt: Tafeln der normierten Kugelfunktionen und ihrer Ableitungen. Gotha 1935
- [7] H. Kautzleben: Statistische Analyse des geomagnetischen Hauptfeldes. Habilitationsschrift, Math.-Nat. Fak. der Karl-Marx-Universität Leipzig, 1966

Karl Ledersteger zum siebzigsten Geburtstagam 11. November 1970

von Max Kneißl, München

Als ich 1939 in Berlin im Reichsamt für Landesaufnahme meinen ersten und einzigen Vortrag hielt, bemühte ich mich, stark beeindruckt von der ruhmreichen Tradition der ehemals Preußischen Landesaufnahme, mein bestes Hochdeutsch zu sprechen und kehrte danach, mit mir selbst zufrieden, auf meinen Platz zurück. Da klopfte mir von rückwärts ein wohlwollend lächelnder Kollege auf die Schulter und flüsterte mir zu: "Endlich süddeutsche Laute in diesen heiligen Hallen!" Dies war meine erste Begegnung mit Karl Ledersteger, der sich, geboren am 11.11.1900, gerne rühmte, noch ein Geodät des 19. Jahrhunderts zu sein, der aber nichtsdestoweniger die Geodäsie des 20. Jahrhunderts durch seine Ideen, durch sein gediegenes Wissen und seine ungebrochene Schaffenskraft, mit praktischen und theoretischen Arbeiten bis heute in Unruhe hält. - Dieses erste Treffen war der Beginn einer tiefen Freundschaft, die bis heute lebendig wirkt.

Nach dem Studium der Mathematik, Darstellenden und Projektiven Geometrie, Physik, Astronomie und Geodäsie an der Universität und an der T.H. Wien bestand Karl Ledersteger im Juni 1924 die Rigorosen aus Astronomie und theoretischer Physik einerseits und aus Philosophie andererseits mit Auszeichnung. Bereits im Juli 1924 promovierte er mit der Arbeit "Das Sternsystem Ursa major, eine Spiralbewegung der Milchstraße". Von 1924 bis 1926 war er an der Sternwarte Wien vielseitig tätig. Von Herbst 1926 bis Herbst 1931 arbeitete er als Assistent an der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie bei Hofrat R. Schumann. Sein wissenschaftliches Interesse galt dabei den Polhöhen schwankungen, den Schweremessungen, den Drehwaagmessungen und der Triangulation I.O. Ende 1931 bis Ende 1939 war er beim

Österreichischen Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen tätig, und in dieser Position wurde er mit allen damals laufenden internationalen Arbeiten der physikalischen und astronomischen Geodäsie vertraut. In dieser Zeit nahm er auch an ingenieurtechnischen Vermessungen höchster Genauigkeit teil. 1939 wurde er an das Reichsamt für Landesaufnahme zur Einrichtung eines Referats für astronomische Ortsbestimmung und Schweremessungen versetzt. 1941 wurde er zur Wehrmacht eingezogen und zur Ausführung schwierigster geodätischer Arbeiten verpflichtet. 1943 wurde er gleichzeitig von den Technischen Hochschulen Wien und Darmstadt zum Ordinarius vorgeschlagen und schließlich am 1. März 1944 zum Ordinarius am Institut für Höhere Geodäsie an der TH Wien berufen.

Über die wichtigsten Ergebnisse seiner eigenen Forschungen, über seine zahlreichen Veröffentlichungen und Ehrungen (o. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Korr. Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Korr. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Ehrendoktor der TH Graz, usw.) wird in Heft E 13 der Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission ausführlich berichtet.

Ein Höhepunkt des wissenschaftlichen Lebenswerkes von Karl Ledersteger war 1969 das Erscheinen seines Buches "Astronomische und Physikalische Geodäsie (Erdmessung)" als Band V des vom Verfasser dieser Würdigung herausgegebenen Handbuchs der Vermessungskunde, das in der gesamten internationalen geodätischen Welt hervorragende und einhellige Aufnahme und Anerkennung findet. Es legt auch Zeugnis von der bisher drei Jahrzehnte währenden freundschaftlichen Zusammenarbeit des Verfassers dieser Zeilen mit dem Jubilar ab.

Geodätische Deformations-  
messungen  
an der Oleftalsperre

von o. Prof. Dr. techn. Fritz Löschner  
Direktor des Geodätischen Instituts der  
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

Vor kurzem unternahm ich den Versuch, das wichtige Kapitel der Ingenieurgeodäsie "Geodätische Deformationsmessungen an Bauwerken" prinzipiell und systematisch zu ordnen, einer Einteilung zuzuführen und die Voraussetzungen für beweissichernde Ergebnisse zu definieren. [1]

Über die Deformationsmessungen an der Oleftalsperre habe ich mit meinen Mitarbeitern bereits grundlegende Feststellungen und Untersuchungen veröffentlicht [2].

Besonders hingewiesen wurde auf den geomorphologischen Unterschied bei Talsperrenvermessungen im Hochgebirge und im Hügelland, der von maßgebender Bedeutung ist für die Ausbildung des Triangulationsnetzes, für die Anordnung von Orientierungspunkten u. v. a. m.

Das Bauwerk selbst, Art und Umfang der Messungen und der sukzessive Aufbau des Triangulierungsnetzes wurde in [1] bereits beschrieben. Des Weiteren wurden die trigonometrischen Lage- und Höhenmessungen im Pfeilernetz und zu den Mauerbolzen Diskussionen unterzogen, ebenso wie die Nivellierarbeiten. Schließlich wurden einige Überprüfungen des verwendeten Instrumentariums beschrieben.

Ein weiterer Bericht über die Ergebnisse sämtlicher, an der Oleftalsperre durchgeföhrten Messungen ist in Vorbereitung.

Einige Erkenntnisse und Messungsergebnisse sollen hier vorweggenommen werden.

Zu Baubeginn ist die Rurtalsperren-Gesellschaft am 16. 11. 1956 an das Geodätische Institut der Technischen Hochschule Aachen mit der Bitte herangetreten, während der Betonierung des Mauerpfeilers elf Messungen zur Feststellung etwaiger Senkungserscheinungen bzw. zwecks Feststellung der Belastungsfähigkeit des Untergrundes vorzunehmen. Das geologische Gutachten von Professor Dr. Rode, TH Aachen, stellt hier hauptsächlich Grauwacke und Schiefer fest, die vielfach von sandreichem Schiefer mit Grauwacke durchzogen sind.

Als Ergebnis dieser Voruntersuchungen konnte eine durchschnittliche Senkung von 0.8 mm festgestellt werden, durchaus im Rahmen der Zulässigkeit, so daß eine Gefährdung des Bauwerkes durch zu hohe Beanspruchung des Fundamentes nicht angenommen werden konnte.

Nach Abschluß der Betonierungsarbeiten übertrug die Rurtalsperren-Gesellschaft G.m.b.H. einen Teil der geodätischen Überwachung der Oleftalsperre dem damaligen Direktor des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Herrn o. Prof. Dr. phil. habil. F.R.Jung. Folgende Messungen, die wiederholt ausgeführt werden sollten, wurden vereinbart:

Trigonometrische Lage- und Höhenbeobachtungen der Mauerbolzen auf der Luftseite der Pfeilerzellen-

mauer, Präzisions-Nivellement über die Mauerkrone und am Fuß der Pfeilerzellen 10 bis 13 mit Anschluß an standsichere Festpunkte außerhalb des Einflußbereiches der Talsperre.

Die geodätischen Kontrollen sollten unabhängig von Alignementmessungen vermarkter Punkte auf der Mauerkrone erfolgen, die von der Rurtalsperren - Gesellschaft selbst durchgeführt werden sollten.

Bei den Vorbesprechungen über die Meß-Methodik forderte der Staatsaufsichtsbeamte ausdrücklich auch "schnellere Meßverfahren", beschränkt auf einige wichtige Zielpunkte, um bei schnell steigendem Wasserstand rasche Entschlüsse fassen zu können. Die Feststellung der Verschiebungen wurde von der Bauherrschaft in 3 Koordinatenrichtungen verlangt. Man diskutierte damals über Alignement-Messungen der Mauerkrone und die Anwendung dieser Meßmethode auf Meßpunkte in halber Höhe der Pfeiler und an deren Fuß. Professor Jung lehnte dieses Verfahren wegen Refraktionsgefahr ab. Warum aber das Alignement der Mauerkrone nicht in das trigonometrische Netz eingebaut wurde, konnte nicht geklärt werden. Man begab sich dadurch einer durchaus erwünschten Kontrollmöglichkeit.

Meine in [3] beschriebene Richtstrahl-Methode hätte an der Oleftalsperre durchaus zur Anwendung kommen können.

Nach dem Tode von Herrn Professor Jung trat die Rurtalsperren-Gesellschaft an mich mit der Bitte heran, die Deformationsmessungen an der Oleftalsperre weiterzuführen. Gern stellte ich meine an fünf 70 bis 120 m hohen Talsperren des Tauernkraftwerkes gewonnenen Erfahrungen zur Verfügung.

Vor allem konnte ich die Rurtalsperren-Gesellschaft davon überzeugen, daß sämtliche Messungen an einer Talsperre einer einheitlichen, gemeinsamen Beurteilung zugeführt werden sollen. Daraufhin wurden zwei Alignementpfeiler, so gut es eben noch ging, in das bereits bestehende Festpunktnett I - V einbezogen. Die Netzausbildung wäre zweifellos eleganter ausgefallen, hätte man diesen Grundsatz von vornherein berücksichtigt.

Für die Berechnung des Primärnetzes wurde ein örtliches Koordinatensystem eingeführt, dessen X-Achse ca. 200 m nordwestlich parallel zu Mauerachse verläuft. Die positive Y-Achse zeigt talwärts.

Zum Unterschied von den "Kurzmessungen", die lediglich die Sicherheit der Talsperre während des Aufstaus zu dokumentieren hatten, werden unter dem Ausdruck "Gesamtmessung" diejenigen Messungen verstanden, bei denen das gesamte Festpunktnett beobachtet wurde.

Die erste Gesamtmessung fand Oktober bis Dezember 1959 statt. Der Stauraum war zu dieser Zeit leer, die Temperatur während der Messungen betrug ca. 3° Celsius.

Diese Messung dient als Ausgangsmessung, sie definiert die Ausgangslage des Bauwerkes. Die Winkelmessung erfolgte mit einem Präzisionstheodolit WILD T 3, die Streckenmessung der Basis auf der Mauerkrone erfolgte mit einem Invarband.

Für die Berechnung der Ausgangskoordinaten wurde folgendes Verfahren angewandt:

Für die Punkte IV und V wurden die Koordinaten angenommen und daraus zunächst die vorläufigen Koor-

dinaten für die Punkte I, II und III sowie für die Endpunkte der Streckenbasis auf der Staumauer berechnet. Dann wurden durch eine Koordinatenumformung mit den beiden Basisendpunkten als Umformungsachse die Koordinaten für IV und V sowie die Näherungskoordinaten für I, II und III berechnet. Das so entstandene Netz I - II - III - IV - V wurde dann einer Ausgleichung unterworfen, wobei die Koordinaten für IV und V festgehalten wurden.

Es ergaben sich folgende Fehler:

Mittlerer Fehler einer gemessenen Richtung:  $\pm 2.0^{\text{cc}}$

Mittlerer Fehler der Pfeilerkoordinaten:

I	$m_x = \pm 0,48 \text{ mm}$	$m_y = \pm 0,70 \text{ mm}$
II	$m_x = \pm 0,43 \text{ mm}$	$m_y = \pm 0,47 \text{ mm}$
III	$m_x = \pm 0,52 \text{ mm}$	$m_y = \pm 0,49 \text{ mm}$

Die Höhe der Pfeiler I, II und V wurde einnivelliert, die Höhe der Pfeiler III und IV durch trigonometrische Höhenübertragung bestimmt. Vorerst wurde ein Refraktionskoeffizient von 0.13 zugrunde gelegt.

Bei den folgenden Gesamtmessungen handelte es sich nun darum, Pfeilerverschiebungen festzustellen, damit die Lage und Höhe der Mauerbolzen auf trigonometrischem Wege mit höchster Wahrscheinlichkeit bestimmt werden konnte.

Im Oktober und Dezember 1964 wurde die 3. und 4. Gesamtmessung durchgeführt, die Anlaß gaben, Untersuchungen anzustellen, welche Pfeiler des trigonometrischen Netzes tatsächlich standfest sind und welche Zusammenhänge zwischen dem Alignement und den trigonometrischen Beobachtungen bestehen.

Die Feststellung der Pfeilerbewegungen nach vier

Gesamtmessungen erfolgte nach mehreren Verfahren: Durch Ausgleichung, Lineartransformation bzw. durch Festhalten zweier Meßpfeiler als Basis, sodann durch Festhalten von drei Beobachtungspunkten. Außerdem wurde das gesamte Netz I - V einer Helmert-Transformation unterworfen, wobei sich herausstellte, daß die Beobachtungspfeiler II und IV Verschiebungen bis zu 2 mm erlitten hatten.

Beim Versuch, die Alignement-Messungen mit den trigonometrischen zu koordinieren, ergab sich die betrübliche Tatsache, daß sämtliche bisherigen Alignementmessungen wegen unfachgemäßer Handhabung des Beobachtungsinstrumentariums unbrauchbar waren. Diese Tatsache veranlaßte mich, wie schon so oft, auf die konsequente Anwendung der drei geodätischen Prinzipien, des Ordnungsprinzips, des Kontroll- oder Zuverlässigkeitssprinzips und des Genauigkeits- oder Wirtschaftlichkeitsprinzips hinzuweisen; Überlegungen, die bereits bei der Wahl der Meßverfahren, also vor Beginn jeder Vermessungstätigkeit, anzustellen sind.

1968 faßte mein Mitarbeiter F. W. Ehrich den plausiblen Gedanken, die Orientierungsunbekannten auf den einzelnen Beobachtungspfeilern vor der Ausgleichung nicht zu eliminieren, sondern ihre Größen und mittleren Fehler zunächst in einer eigenen Ausgleichung festzustellen. Der mittlere Fehler der Orientierungsunbekannten diente nun als Kriterium für die Größenordnung der Verschiebung der einzelnen Pfeiler, mit anderen Worten: Es konnte entschieden werden, welche Pfeiler bei der vorliegenden Messung keine oder nur geringe Verschiebungen erfahren hatten. Die Koordinaten dieser Pfeiler wur-

den für die Ausgleichung unverändert beibehalten. Der Vergleich der Orientierungen vor und nach der Ausgleichung bestätigte die Richtigkeit der getroffenen Annahmen. Dieses Verfahren ist also vorzugsweise anwendbar, wenn das Netz aus mehreren Festpunkten besteht, über deren Verschiebungsbeiträge noch keine klaren Vorstellungen existieren.

Als vorläufiges Ergebnis der trigonometrischen Lagebeobachtungen kann aus den Gesamtmessungen 1 - 5 der Jahre 1959 bis 1965 eine bleibende Verschiebung der ganzen Talsperre von ca. 2.4 - 4 mm bei den verhältnismäßig niedrigen Pfeilerzellen 3 bis 8 talwärts, also zur Luftseite hin, und von rd. 4 - 5 mm bei den hohen Pfeilerzellen 9 bis 13 festgestellt werden. Die Vektorenrichtungen bilden mit der Y-Achse einen Winkel im Uhrzeigersinn von ca. 10 - 20° bei den Pfeilerzellen 3 bis 8 und von ca. 20 - 40° bei den Pfeilerzellen 9 bis 13. Prof. Rode deutet diese Bewegungen aus der geologischen Situation ganz sinngemäß als ein Zusammendrücken der zwischen den Grauwacken liegenden sandigen Schieferschichten.

Offensichtlich waren die Bewegungen der Talsperre 1967 noch nicht zur Ruhe gekommen. Auch die Untersuchung der Höhenveränderung lässt dies erkennen.

Die beim Kolloquium für Ingenieurgeodäsie in Graz im April 1970 vorgetragenen Möglichkeiten der Talsperren-Beobachtung mittels elektronischer Präzisions-Distanzmessung eröffnen neue Wege der Disposition der Messungen, ohne jedoch das Problem stabiler Beobachtungspunkte eliminieren zu können.

Abschließend sei darauf hingewiesen, welch frucht-

bare Erkenntnisse aus geodätischen Deformationsmessungen abgeleitet werden können, nicht nur für die einzelnen Fachgebiete wie Bauwesen, Bodenkunde, Geologie und Vermessungskunde, sondern vor allem auch in interdisziplinärer Beziehung.

- [ 1 ] F. Löschner: Geodätische Deformationsmessungen an Bauwerken AVN 3/1970, 7/1970
- [ 2 ] F. Löschner, F. Hilger, U. Brettschneider: Deformationsmessungen untersucht am Beispiel der Oleftalsperre, Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen Nr. 10, 1966
- [ 3 ] F. Löschner: Das Vermessungswesen in der österreichischen Energiewirtschaft Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereines 1954/15, 16

# DIE METHODE DER KLEINSTEN QUADRATEN IN DER PHYSIKALISCHEN GEODÄSIE

von Helmut Moritz

Technische Universität Berlin

## 1. Einführung

Für die Bestimmung der Erdgestalt kennt man heute eine Reihe von Verfahren - Verwendung astronomisch-geodätischer Lotabweichungen, gravimetrische Methoden, geometrische und dynamische Anwendung von Satelliten u.a. - , wie sie Professor Ledersteger in seinem umfassenden Werk [2] dargestellt hat.

Der praktischen Anwendbarkeit eines jeden dieser Verfahren sind nun gewisse Grenzen gesetzt. Bei der astronomisch-geodätischen Methode etwa ist es die Beschränkung auf Landgebiete, wodurch sie für etwa drei Viertel der Erdoberfläche, die von Meer bedeckt sind, derzeit nicht in Frage kommt. Die gravimetrischen Methoden wiederum setzen theoretisch die Kenntnis der Schwereanomalien auf der ganzen Erdoberfläche voraus; es wird aber wohl noch einige Zeit dauern, bis die Weltmeere vollständig gravimetrisch vermessen sind. Für die Verwendung von Satelliten endlich gilt, daß sie globale Strukturen ausgezeichnet erfassen, aber wenig Details liefern.

Glücklicherweise ist es nun so, daß vielfach Nachteile und Beschränkungen der einen Methode durch Vorteile einer anderen Methode ausgeglichen werden können,

so daß die einzelnen Verfahren einander vorzüglich ergänzen. Für alle diese Verfahren liegen heute eine überwältigende Fülle der verschiedenartigsten Meßdaten vor. Diese sind zwar keineswegs immer optimal verteilt, aber man kann doch erwarten, durch geeignete Kombination der verschiedenen Daten diesen Nachteil einigermaßen wettmachen zu können.

Darüber hinaus wird an der Entwicklung neuer Meßdaten gearbeitet, wie Fluggravimetrie, Satelliten-Altimetrie oder Gradiometrie. Um die so anfallenden Meßdaten für die Bestimmung der Erdgestalt zu verwerten, bedarf es vielfach neuer theoretischer Methoden.

Hierbei gilt es, eine Schwierigkeit zu überwinden, die schon bei der Verwendung der bisherigen Meßdaten auftritt, die aber nun ein ganz wesentliches Problem darstellt: die Lückenhaftigkeit des Meßmaterials. Das Schwerpotential der Erde ist eine mathematisch außerordentlich komplizierte Funktion; es ist theoretisch unmöglich, diese Funktion empirisch durch eine endliche Anzahl von Messungen vollständig zu erfassen. Man denke etwa an die Herstellung einer Schwereanomalienkarte: man hat eine gewisse Zahl von Meßpunkten, und dazwischen muß man interpolieren. Die dadurch bedingte Willkürlichkeit wird sich umso weniger auswirken, je dichter die Meßpunkte liegen, je besser sie verteilt sind und je glatter das Schwereanomalienfeld ist.

Bei der Fluggravimetrie aber rechnet man mit Abständen der Flugprofile von einigen hundert Kilometern. Ähnliches gilt für die Gradiometrie; welche die Messung höherer Ableitungen des Erdschwerpotentials zum Ziel hat; noch dazu ist das Feld einer solchen Ableitung wesentlich weniger glatt als das Schwereanomalienfeld.

Der Einsatz von Gravimetern und Gradiometern in Flugzeugen trägt zwar der unbedingt nötigen Erhöhung

der Meßgeschwindigkeit Rechnung, zieht aber eine Reihe von systematischen und unregelmäßigen Fehlern nach sich: Einfluß von Navigationsfehlern, unregelmäßigen Trägheitskräften (durch Schwanken und Zittern des Flugzeugs) u.a. Es gilt daher, die Auswirkung dieser Meßfehler rechnerisch möglichst gering zu halten.

Die theoretische Geodäsie steht also heute vor der schwierigen Aufgabe, Verfahren für die optimale Bestimmung der Erdgestalt aus einer ungeheuren Anzahl verschiedenartiger, aber schlecht verteilter und mit Meßfehlern behafteter Daten zu finden.

Die Verarbeitung einer großen Anzahl von Meßdaten wird durch den Einsatz elektronischer Rechenanlagen möglich. Schwieriger ist es schon, die verschiedenen Meßgrößen in theoretisch einwandfreier Weise bestmöglich miteinander zu kombinieren.

Das klassische Beispiel einer solchen Kombination ist Lederstegers Bestimmung der großen Halbachse der Erde mit Hilfe der absoluten Lotabweichungsausgleichung [1]. Es handelt sich hierbei um eine Verbindung astronomisch-geodätischer und gravimetrischer Verfahren. Die astronomisch-geodätische Methode liefert das Geoid im richtigen Maßstab, aber mit unbekannter Lage gegenüber dem Erdschwerpunkt. Die gravimetrische Methode ergibt ein Geoid in absoluter (geozentrischer) Lage - der Mittelpunkt des Bezugsellipsoids fällt in den Erdschwerpunkt -, aber mit unbekanntem Maßstab. Der Vergleich beider Geoide bestimmt alle unbekannten Parameter: den Maßstab des gravimetrischen Geoids und die Lage des astronomisch-geodätischen Geoids gegenüber dem Erdschwerpunkt.

Neben seiner großen praktischen Bedeutung- es handelt sich um die bis heute wichtigste Methode zur Bestimmung der Erddimensionen - ist dieses Beispiel auch theoretisch sehr lehrreich. Es zeigt klar, wie durch

richtige Kombination hier Nachteile eines Verfahrens durch Vorteile eines anderen Verfahrens wettgemacht werden. Die Verwendung der Ausgleichsrechnung zur Bestimmung unbekannter systematischer Parameter ist ebenfalls charakteristisch.

Und schließlich lässt sich an Hand dieses Beispiels noch eine weitere Fragestellung anknüpfen. Nach der Bestimmung der unbekannten Parameter - Lage und Maßstab - lassen sich das astronomisch-geodätische und das gravimetrische Geoid räumlich zur Deckung bringen. Wird diese Deckung vollkommen sein? Ja - wenn wir keine Meß- und Interpolationsfehler in Lotabweichungen und Schwereanomalien hätten. Infolge dieser Fehler aber werden die beiden Geoide, auch nachdem sie bestmöglich zur Deckung gebracht worden sind, geringfügige, von Ort zu Ort verschiedene Abweichungen voneinander aufweisen. Wie lassen sich diese Abweichungen durch Ausgleichung beseitigen, um zu einer eindeutigen bestmöglichen Geoidbestimmung zu gelangen?

Hier setzen grundsätzliche theoretische Schwierigkeiten ein. Die bekannten Methoden der Ausgleichungsrechnung versagen hier, weil das Erdschwerefeld durch kontinuierliche Funktionen dargestellt wird, während die Ausgleichungsrechnung sich stets auf endlich viele diskrete Parameter bezieht. Was man braucht, ist also eine statistische Theorie des Erdschwerefeldes. Eine solche Theorie wurde durch die Arbeit einer Reihe von Geodäten in den letzten 15 Jahren geschaffen; so gelang es, die genannten theoretischen Schwierigkeiten in verhältnismäßig einfacher Weise zu überwinden.

Der grundlegende Schritt erfolgte 1956 durch die Einführung des Begriffes der Kovarianz der Schwereanomalien durch den finnischen Geodäten R.A. Hirvonen. Die Schwereanomalien wurden also als korrelierte statistische Veränderliche - formal ganz ähnlich wie die Meß-

fehler - betrachtet. Das kontinuierliche Feld der Schwereanomalien bildet, wie man in der mathematischen Statistik sagt, einen stochastischen Prozeß. Nun kann man die aus der Theorie dieser Prozesse bekannten Verfahren zur optimalen Prädiktion, d.h. Interpolation und Extrapolation, auf das Schwereanomaliengelände übertragen. Es ist dies die Interpolation nach kleinsten Quadraten, wie sie in [2] auf S. 719 - 722 beschrieben ist.

Diese Theorie wurde weiter entwickelt durch Einbeziehung zufälliger und systematischer Meßfehler. Dies war besonders im Zusammenhang mit der Fluggravimetrie nötig, wo das "Rauschen" (der zufällige Meßfehler) das "Signal" (die zu messende Schwereanomie) überwiegt.

Der entscheidende Durchbruch aber erfolgte durch die Arbeit des dänischen Geodäten T. Krarup [3], dem es gelang, eine einheitliche Behandlung aller Größen des Erdschwerefeldes in einer Schätzung nach kleinsten Quadraten zu finden.

Wie wir sehen werden, ist die neue Theorie außerordentlich einfach und dabei umfassend und vielseitig. Damit wird nunmehr auch in der physikalischen Geodäsie eine optimale Verarbeitung und objektive Kombination aller Meßdaten möglich, wie sie in anderen Zweigen der Geodäsie längst in Form der Ausgleichsrechnung üblich ist.

## 2. Das Verfahren

---

In Lederstegers Werk [2] findet man folgende Formel für Interpolation nach kleinsten Quadraten in Matrzenschreibweise:

$$\tilde{\Delta g}_P = (c_{P1}, c_{P2}, \dots, c_{Pn}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \vdots \\ \Delta g_n \end{pmatrix}; \quad (1)$$

dies ist Gl. (125.16a) auf S. 720 mit einer leichten Änderung der Bezeichnung.

Hierin sind  $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n$  gemessene Schwerkraftanomalien,  $\tilde{\Delta g}_P$  ist der optimale Schätzwert für die unbekannte Schwerkraftanomalie  $\Delta g_P$  im Interpolationspunkt P, und  $c_{ij}$  und  $c_{Pi}$  sind Kovarianzen:

$$c_{ij} = \text{cov}(\Delta g_i, \Delta g_j) = M(\Delta g_i \Delta g_j), \quad (2)$$

$$c_{Pi} = \text{cov}(\Delta g_P, \Delta g_i) = M(\Delta g_P \Delta g_i),$$

also geeignet zu bildende statistische Mittelwerte M von Produkten; siehe [2], S. 719.

Krarup [3] verdanken wir nun die grundlegende Erkenntnis, daß diese Formel auch gilt, wenn wir statt der  $\Delta g_i$  Messungen beliebiger Elemente des Schwerkraftfeldes, die wir mit  $x_i$  bezeichnen wollen, einführen; ebenso kann man mit dieser Formel irgendein anderes Element des Schwerkraftfeldes, mit  $s_p$  bezeichnet, bestimmen. Zum Beispiel können  $x_i$  gemessene Lotabweichungen sein und  $s_p$  kann die Geoidhöhe in einem Punkt P bedeuten.

Es gilt also

$$\tilde{s}_P = (c_{P1}, c_{P2}, \dots, c_{Pn}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

wobei  $\tilde{s}_p$  den Schätzwert für das "Signal"  $s_p$ , d.h. für das zu bestimmende Element des Schwerefeldes, bedeutet.

Natürlich muß man die Kovarianzen folgerichtig definieren: statt (2) ist jetzt

$$C_{ij} = \text{cov}(x_i, x_j), \quad C_{pi} = \text{cov}(s_p, x_i). \quad (4)$$

Von wesentlicher Bedeutung ist auch, daß die Gleichungen (3) und (4) sogar dann gelten, wenn die Messungen  $x_i$  nicht fehlerfrei, sondern mit Meßfehlern behaftet sind; man muß also dann nach (4) der Berechnung der Kovarianzen die fehlerbehafteten Meßgrößen  $x_i$  zugrundelegen.

Gl. (3) gilt für eine endliche Anzahl  $n$  diskreter Messungen. Das Verfahren läßt sich jedoch unmittelbar auf kontinuierliche Messungen übertragen; man braucht im wesentlichen nur auftretende Summen durch Integrale zu ersetzen.

Die Lösung (3) besitzt eine grundlegende Invarianzeigenschaft: sie ist invariant gegenüber linearen Transformationen sowohl der Meßgrößen  $x_i$  als auch der Ergebnisse  $s_p$ . Um die Tragweite dieser Eigenschaft einzusehen, stellen wir uns vor, wir berechnen die Geoidhöhe  $N$  in einem Punkt  $P$  auf Grund einer Anzahl  $n$  über die Erde verteilt gemessener Schwereanomalien auf zwei Arten:

- (A) wir bestimmen durch Interpolation nach Gl. (1) ein kontinuierliches Schwereanomalienfeld auf der ganzen Erdoberfläche, aus dem wir dann nach der Formel von Stokes die Geoidhöhe  $N_p$  berechnen;
- (B) wir berechnen  $N_p$  direkt nach (3), mit  $x_i = \Delta g_i$  und  $s_p = N_p$ .

Da die Formel von Stokes die Geoidhöhe  $N$  als lineare Transformation der Schwereanomalien  $\Delta g$  liefert,

so erhalten wir wegen der genannten Invarianzeigenschaft exakt das gleiche Ergebnis, ob wir nun  $N_p$  nach (A) oder nach (B) bestimmen. Die aufgezeigte allgemeine Methode bestimmt also ein einheitliches, konsistentes Schwerefeld, unabhängig davon, welche spezielle Größe man gerade berechnet.

Natürlich muß man die Kovarianzen folgerichtig wählen: man kann etwa die Kovarianzfunktion der Schwerkreanomalien, in [2], S. 720 mit  $C(r)$  bezeichnet, ein für allemal annehmen und daraus exakt die benötigten Kovarianzen (etwa zwischen Geoidhöhen und Schwerkreanomalien) ableiten. Dies geschieht mit Hilfe des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes, das man aus der Fehlertheorie korrelierter Beobachtungen kennt; da die auftretenden Formeln, wie die Integralformeln von Stokes und Vening Meinesz, lineare Operatoren darstellen, ist die Theorie der Kovarianzfortpflanzung für lineare Operatoren anzuwenden, wie sie in [4] entwickelt wurde.

Ähnliche Invarianzeigenschaften kennt man aus der Ausgleichsrechnung. Es erhebt sich die Frage nach dem Zusammenhang der hier betrachteten Schätzung nach kleinsten Quadraten und der Ausgleichsrechnung. In der Tat sind beide Methoden einander sehr ähnlich. Beide können auf Grund zweier verschiedener Minimumsprinzipien abgeleitet werden: entweder aus der Forderung minimaler Norm (in der Ausgleichsrechnung:  $[p_{vv}] = \text{Minimum}$ ) oder aus der Forderung kleinsten mittleren Fehlers des Ergebnisses; letztere wurde in [2], S. 719-720 verwendet.

Der Unterschied zwischen den beiden Methoden läßt sich, etwas unscharf, dahingehend formulieren, daß die Ausgleichsrechnung die Schätzung systematischer Parameter betrachtet, während sich das hier angegebene Schätzverfahren auf unregelmäßig verän-

derliche Größen mit dem Mittelwert Null (Schwereanomalien, Geoidhöhen usw.) bezieht. Es läßt sich auch ein allgemeines mathematisches Modell für eine Schätzung nach kleinsten Quadraten angeben, welches beide Methoden als Sonderfälle enthält [6].

### 3. Anwendungen

Nun wollen wir die soeben beschriebene Methode auf das in der Einleitung erwähnte Problem der Geoidbestimmung durch Kombination astronomisch-geodätischer und gravimetrischer Daten anwenden. Wir nehmen an, daß wir die systematischen Parameter - Verschiebung und Maßstab - nach Ledersteger bestimmt und die astronomisch-geodätischen Lotabweichungen in das absolute geozentrische System übergeführt haben.

Das Problem der Geoidbestimmung können wir nun so formulieren. Die Gesamtheit der Messungen  $x_i$ , die in Gl. (3) eingehen, bestehe aus gravimetrisch bestimmten Schweranomalien  $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots$  und astronomisch-geodätischen Lotabweichungen  $\xi_1, \xi_2, \dots; \eta_1, \eta_2, \dots$ . Die zu schätzende Größe  $s_p$  sei die Schweranomalie  $\Delta g_p$  in einem Punkt  $P$ . Lassen wir  $P$  über die ganze Erdoberfläche variieren, so bekommen wir ein optimal bestimmtes Schweranomalienfeld, aus dem wir  $N$  durch Anwendung der Formel von Stokes finden.

Zur Anwendung der Formel (3) brauchen wir nur noch die entsprechenden Kovarianzen. Nach (4) sind dies die Größen  $\text{cov}(\Delta g_A, \Delta g_B)$ ,  $\text{cov}(\Delta g_A, \xi_B)$ ,  $\text{cov}(\Delta g_A, \eta_B)$ ,  
 $\text{cov}(\xi_A, \xi_B)$ ,  $\text{cov}(\xi_A, \eta_B)$  und  $\text{cov}(\eta_A, \eta_B)$ ,

wobei A und B zwei Punkte aus der Gesamtheit bedeutet, die aus allen Meßpunkten und dem Neupunkt  $P$  besteht.

Unter der Annahme fehlerfreier Messungen sind, wie schon erwähnt, alle diese Kovarianzen aus der Kovari-

anzfunktion der Schwereanomalien ableitbar, die wir mit  $C(A,B)$  bezeichnen.

Wir schreiben die Formel von Vening Meinesz für  $\xi$  in der Form

$$\xi_A = \frac{1}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g_D \frac{ds}{d\psi_{AD}} \cos \alpha_{AD} d\sigma_D , \quad (5)$$

wobei also  $D$  den laufenden Integrationspunkt bezeichnet;  $G$  ist ein Mittelwert für die Schwere,  $\alpha$  ist das Azimut,  $\psi$  ist die sphärische Distanz und  $\sigma$  bedeutet die Einheitskugel.

Gl. (5) kann man durch folgende Abkürzungen symbolisieren:

$$\xi_A = X_{AD} \Delta g_D , \quad (6)$$

wobei der lineare Operator  $X_{AD}$  also für das Integral von Vening Meinesz steht. Dann ergibt sich aus dem Kovarianzfortpflanzungsgesetz, [4], S.40, Gl. (7,5):

$$\text{cov}(\xi_A, \xi_B) = X_{AD} X_{BE} C(D, E) . \quad (7)$$

Analog findet man

$$\text{cov}(\Delta g_A, \xi_B) = X_{BD} C(A, D) , \quad (8)$$

und selbstverständlich ist  $\text{cov}(\Delta g_A, \Delta g_B) = C(A, B)$ . In ähnlicher Weise erhält man alle übrigen Kovarianzen, womit das Problem theoretisch gelöst ist.

Wir haben dieses Beispiel gewählt, um die allgemeine Methode an einem einfachen Fall zu erläutern. Eine Reihe weiterer Anwendungen sind in [5] beschrieben. So lässt sich durch eine Kombination von Schweremessungen und aus Satellitenbeobachtungen bestimmten Kugelfunktionskoeffizienten ein globales Schwereanomaliengefeld erzeugen, das zum Beispiel in gravimetrisch unvermessenen Gebieten zur Berechnung des Beitrags

entfernter Zonen zu den Integralen von Stokes und Vening Meinesz dienen kann. In der Fluggravimetrie ist das Verfahren zur optimalen Filterung der registrierten Schwerkprofile und zur Interpolation anwendbar; besonders bemerkenswert ist, daß man auf diese Weise, die Schwierigkeiten der analytischen Fortsetzung nach unten umgehend, direkt das Schwereanomalienfeld in Meeresniveau bestimmen kann. Auf ähnliche Weise ergibt die Methode aus Schweremessungen an der Erdoberfläche ein eindeutig bestimmtes reguläres Schwereanomalienfeld in Meeresniveau und bewirkt somit eine Lösung des Problems von Bjerhammar ([2], S. 694). Auch lassen sich auf diese Weise Gradiometermessungen in Verbindung mit anderen Maßgrößen bestmöglich geodätisch nutzen.

Man kann sich überhaupt ohne weiteres vorstellen, in Gl. (3) alle verfügbaren Messungen verschiedener Elemente des Erdschwerefeldes einzuführen und daraus ein einheitliches optimales Schwerkfeld zu berechnen. Ja, wir können gedanklich noch einen Schritt weitergehen: mit Hilfe des allgemeinen Ausgleichsalgorithmus nach [6] können wir auch noch die Berechnung von Dreiecksnetzen, Satellitentriangulationen u. dgl. in unsere Betrachtung einbeziehen. So erhalten wir ein bemerkenswert einfaches Schema für eine einheitliche gemeinsame Ausgleichung aller geometrischen und physikalischen Beobachtungen in der Erdmessung.

Selbstverständlich lässt sich dieses Schema aus rechentechnischen und andern praktischen Gründen nur in Teilen realisieren - von einigen solchen Teilproblemen war gerade die Rede -; es behält aber seinen Wert als übergeordnetes gedankliches Ziel, das nach Maßgabe der Gegebenheiten zu verwirklichen ist.

Letztlich aber handelt es sich bei diesem Schema um die konsequente Verfolgung eines Weges, an dessen Anfang die absolute Lotabweichungsausgleichung Professor Ledestagers steht.

## LITERATUR

- [1] K. Ledersteger: Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen. Sonderheft 12 d. Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Wien 1951.
- [2] K. Ledersteger: Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung). Bd. V von Jordan/Eggert/Kneißl, Handbuch der Vermessungskunde, 10. Aufl., Stuttgart 1956/1969.
- [3] T. Krarup: A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Publ. No. 44, Danish Geodetic Institute, Copenhagen 1969.
- [4] H. Moritz: Fehlertheorie der graphisch-mechanischen Integration; Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum. Sonderheft 22 d. Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Wien 1961.
- [5] H. Moritz: Least-squares estimation in physical geodesy. Report No. 130, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus 1970.
- [6] H. Moritz: A generalized least-squares model. Studia geophysica et geodaetica, Prag (im Druck).

## GEOS-I SECOR OBSERVATIONS IN THE PACIFIC

by

Ivan I. Mueller

James P. Reilly, Charles R. Schwarz, Georges Blaha

Department of Geodetic Science  
The Ohio State University  
Columbus

### 1. Introduction

This paper is concerned with the use of the some 60,000 Geodetic SECOR observations on GEOS-I taken by the Pacific Tracking Network and available in the National Space Science Data Center. This set of data presents some interesting and unique problems:

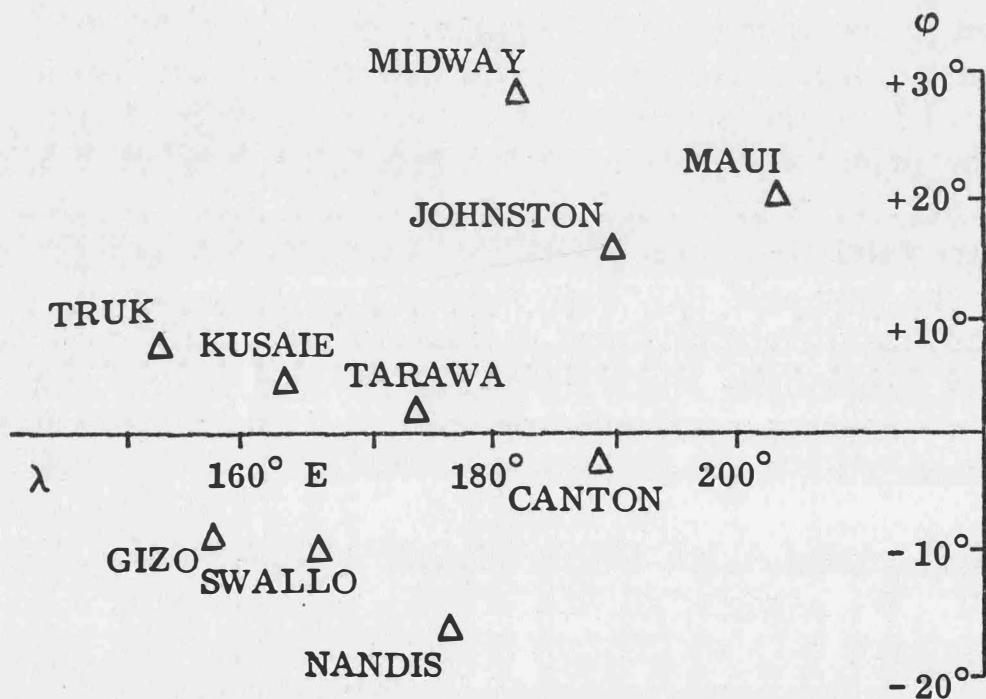
First, the tracking stations which observed GEOS-I constitute a network that is unattached to any major datum. The SECOR Pacific Network as a whole was begun in Japan, with three stations on the Japanese Datum, and extended through the Pacific Ocean to the west coast of the United States. However, observations on GEOS-I were only taken in the middle of the network, from Truk Island to Maui, so that the network determined by the GEOS-I observations alone was isolated from the major datums at the ends of the larger network. The primary satellites for the Pacific Network were from the EGRS series, so that GEOS-I was not always fully observed when the primary satellites were available. Thus, the network determined by the available (GEOS-I) observations alone has some weak ties due to insufficient numbers of observations. Our main interests laid in determining whether the GEOS-I observations could be put together into an independent rigid network, and in finding indirect ties by which such a network could be related to a major geodetic datum.

A second problem area lay in determining the quality of the data itself. We expected to find evidence of systematic errors, since in its early days the SECOR System was plagued by range ambiguities, calibration errors, and possibly unreliable determinations of ionospheric refraction. Theoretically, it is possible to determine station positions, orbit unknowns, and coefficients of observational error models all in one simultaneous short-arc solution. However, the data set available in the Data Center did not include all of the original data. In a great many cases, only segments

of less than two minutes duration from a pass were included. From these short duration segments, it is not possible to define adequately the orbit and the error model. Therefore, a large amount of the data could not be used in short-arc adjustments. For this reason, our main tool was the geometric mode adjustment in which almost all of the data could be utilized. However, short-arc orbital mode adjustments were also used to recover ambiguities and calibration errors from those subsets of the data that constituted passes of reasonable length.

As a further complication, we did not have a priori knowledge of either the error model unknowns, the orbit parameters, or the station positions. Without such a priori constraints, there were just too many unknowns to afford a reasonably well determined solution. If one has fairly good station positions, one can find and remove bad data; conversely, if one has all good data, a rigid network can be easily constructed. Having neither reliable data nor station positions, we were faced with a bootstrap operation.

Preliminary results of this investigation were presented at the GEOS-II Review Conference at NASA, Goddard Space Flight Center in June, 1970, where we reported our best solutions obtainable without modeling for systematic errors [1]



Location of the SECOR Stations in the Pacific

## 2. The "Inner" Adjustment

From a set of range observations between ground stations and satellite positions, one can only determine distances between pairs of points. Since range measurements are independent of the coordinate system, no actual coordinates can be determined from the ranges alone. It is possible to have an adjustment in which the unknowns are the distances between pairs of points, and it can be shown that the total number of independent distances is  $3u - 6$ , where  $u$  is the total number of unknown points. Geodetic solutions, however, are commonly made in terms of the actual coordinates of points, and the computer programs that accomplish these solutions operate with coordinates. To use these programs, a coordinate system for the adjustment must be defined in some manner. In many cases, a priori knowledge of some of the points in some coordinate system is available, and this external knowledge can be brought into the adjustment by weighted constraint equations. In the case of range observations, the minimum number of constraint equations necessary to define the coordinate system is six. These are interpreted geometrically as specifying three parameters to define the origin of the coordinate system and three parameters to define the orientation. The scale of the system is determined by the observations themselves. If more than six constraints are used, the constraint equations may themselves have residuals; in attempting to minimize these residuals, the adjustment process may actually increase the residuals of the range observations, thus masking the true quality of the observational material. Our first objective was to find a set of data that was internally consistent, so we began by using a minimal set of six absolute constraints.

At first these constraints were realized by fixing the three coordinates of one station, two coordinates of a second station, and one coordinate of a third station. We performed many adjustments with this set of constraints and noticed that the selection of the coordinates held fixed had a definite effect on the characteristics of the adjustment. We found that if these were not selected with care, the coordinate system would be poorly defined, and this would result in poor error propagation characteristics, a weak network, and numerical difficulties. For example, if the origin of the system were specified by fixing a station at one extreme end of the net, then stations at the other end would tend to be highly uncertain and highly correlated.

Later, we found that the best way to define the coordinate system was to use the set of constraint equations called "inner"

constraints [2]. In this sense, "best" means resulting in the smallest covariance matrix for the unknowns. Covariance matrices may be compared by means of their traces, and the inner adjustment equations are characterized by the property that the trace of the covariance matrix obtained with their use is a minimum among those obtained by adjusting a given set of range observations augmented by a minimal set of six constraint equations. This property also implies that the mean square uncertainty of the unknowns is smaller when the inner adjustment equations are used.

The constraint equations are written in the form

$$\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

where

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}$  is set of corrections to the approximate coordinates of the unknown points, and

$$\mathbf{C}_1 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \end{array} \right],$$

$$\mathbf{C}_2 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -z_1^\circ & y_1^\circ & 0 & -z_2^\circ & y_2^\circ & \dots & \dots & \dots \\ z_1^\circ & 0 & -x_1^\circ & z_2^\circ & 0 & -x_2^\circ & \dots & \dots & \dots \\ -y_1^\circ & x_1^\circ & 0 & -y_2^\circ & x_2^\circ & 0 & \dots & \dots & \dots \end{array} \right].$$

Both the  $\mathbf{C}_1$  and  $\mathbf{C}_2$  matrices are made up of similar  $3 \times 3$  blocks, where each block contains the coefficients of the unknown coordinates of a point. The symbols  $(x_i^\circ, y_i^\circ, z_i^\circ)$  denote the approximate coordinates of the  $i$ th unknown point, where both the ground points and the satellite positions are considered.

It is also possible to design a set of constraints that will result in the best solution for only a subset of the points. In our adjustments we were only interested in the ground station unknowns, so that we wanted to obtain the best possible solution for these unknowns while using only six constraint equations. This implies that the trace of only that portion of the covariance matrix is minimized which corresponds to the ground station unknowns; thus the variances of the satellite position unknowns are not included in the minimum sum. The

constraint equations that will produce a solution which is best for only some of the unknown points have the same form as those producing the best solution for all the points; however,  $3 \times 3$  blocks of zeros are inserted into those positions in  $C_1$  and  $C_2$  which correspond to unknowns whose variances are not to be included in the minimum sum.

The inner adjustment constraint equations can be given a geometrical interpretation that appeals to intuition. Let  $X_i^o$  denote the set of approximate coordinates of the  $i$ th unknown point,  $dX_i$  denote the corrections to these coordinates, and  $X_i$  denote the adjusted coordinates; i.e.,

$$X_i = X_i^o + dX_i .$$

The first set of constraint equations,  $C_1 X = 0$ , is then equivalent to the set of conditions

$$\sum_i dX_i = 0 .$$

The geometrical interpretation of these conditions is that the center of gravity of all the points will not change after adjustment; i.e.,

$$\sum_i X_i = \sum_i X_i^o .$$

The second set of constraint equations,  $C_2 X = 0$ , corresponds to the conditions

$$\sum_i X_i^o \times dX_i = 0 .$$

If the center of the system remains fixed, then the cross products  $X_i^o \times dX_i$  reflect rotations of the points around the fixed center. These constraint equations insure that the sums of the rotations around all three coordinate axes are zero. The corresponding geometrical interpretation is that the mean orientation of the system of points will not change after adjustment either.

Thus the respective equations  $C_1 X = 0$  and  $C_2 X = 0$ , effectively specify the origin and the orientation of the working coordinate system used in the adjustment. A seventh constraint equation is also available to specify the scale of the system. However, this scale equation is only used when the observations themselves do not determine the scale. This would be the case, for instance, if a set of optical satellite observations were to be adjusted.

### 3. Data and Analysis

#### 3.1 External Constraints

Although there was no direct data available on the absolute or

relative position of any SECOR station, we were able to find several indirect sources of positional information which could be utilized as external constraints in the adjustment. This information consisted of the following (Tables 1 and 2):

1. On Maui there were camera stations from the Coast and Geodetic Survey's Worldwide Geometric Satellite Network (BC-4), and from the Smithsonian Astrophysical Observatory's Network (Baker-Nunn). Both of these stations had been tied into the local survey system together with the Maui SECOR station. The relative positions of these three stations provided  $3 \times 3 = 9$  constraint equations.
2. On Johnston Island there was a PC-1000 camera, operated by the U.S. Air Force almost at the same location that had been occupied by the SECOR station. This PC-1000 camera had observed PAGEOS, ECHO I, and ECHO II simultaneously with BC-4 cameras on Maui, Wake, and Christmas Islands [4]. Since the three BC-4 stations were part of the Coast and Geodetic Survey's world net, coordinates of the Johnston PC-1000 on the North American Datum, together with the direction Johnston (PC-1000) - Maui (BC-4) could be determined. The relative positions of the Johnston stations and the direction Johnston-Maui provided  $3 + 2 = 5$  additional constraint equations.
3. On Midway Island there was a TRANET Doppler station which had been tied to the local survey system, as had the Midway SECOR station. The coordinates of the Doppler station on the Mercury Ellipsoid had been published as part of the NWL-8D solution [5]. Performing a datum transformation, we were able to infer NAD coordinates for the Midway Doppler, and thus determine the direction Midway (Doppler) - Johnston (PC-1000). The relative positions of the stations on Midway and the direction Midway-Johnston provided again  $3 + 2 = 5$  constraint equations.
4. With the above information, the relative and/or the SAO 1969 positions of the stations on Maui, Johnston and Midway could be determined except for the scale, which was available only in the NAD system as propagated through the BC-4 net. These islands being at the eastern end of the network, the station positions at the western end were quite weak, especially in the vertical components. This phenomena was attributed to the cantilever effect of error propagation. In order to reduce this effect more external information was brought into the adjustment in the form of the geodetic heights of the ten SECOR stations. These heights were determined from the SAO 1969 Standard Earth geoid map by adding the geoid undulations to the heights above sea level as determined from spirit leveling [3]. This procedure resulted in heights with respect to the SAO ellipsoid ( $a = 6378155$  m;  $f = 1/298.255$ ). Derived from a geoid map, these heights were quite uncertain. We estimated that

Table 1. Station Coordinates Used in the Network Orientations.

GOCC #	Name	Type	Datum	Latitude	$\sigma$	Longitude (+E)	$\sigma$	h (m)	$\sigma$ (m)	Note
6011	Maui	BC-4	NAD	20° 42' 26."139	0."351	203° 44' 42."886	0."396	3001.4	12.0	1
9012	Maui	Baker-Nunn	SAO 1969	20 42 25.66	0.250	203 44 33.48	0.25	3029.0	7.0	5
6012	Wake	BC-4	NAD	19 17 28.247	0.470	166 36 43.564	0.515	-159.2	17.2	1
6059	Christmas	BC-4	NAD	2 0 13.185	0.487	202 35 20.508	0.380	-22.4	13.3	1
3475	Johnston	PC-1000	NAD	16 43 44.209	0.254	190 28 49.931	0.313	-90.2	7.9	2
2724	Midway	Doppler	Mercury	28 11 48.79		182 36 40.13		-14		3
2724	Midway	Doppler	NAD	28 11 50.47		182 36 46.16		-117		4

Notes:

1. Coast and Geodetic Survey preliminary coordinate.
2. Obtained at OSU by adjusting the ACIC optical data, weighting the coordinates of Maui, Wake, and Christmas according to their uncertainties.
3. NWL-8D Solution ([5] p. A16). Uncertainty is 25 m in each Cartesian coordinate.
4. Obtained from NWL-8D Mercury Datum Coordinate, using translation parameters of  $\Delta x = -40$  m,  $\Delta y = 163$  m,  $\Delta z = 186$  m ([5] p. B1).
5. Computed from Cartesian coordinates, with  $\sigma = 7$  m for each coordinate, and referred to the SAO an ellipsoid of the following parameters:  $a = 6378155$  m,  $1/f = 298.255$  [3].

Table 2. Relative Positions from Local Ground Surveys

From To	Name	Type	$\Delta x(m)$	$\Delta y(m)$	$\Delta z(m)$	Estimated $\sigma$ in each coordinate (m)
5408	Johnston	SECOR				
3475	Johnston	PC-1000	3.8	0.8	-1.2	0.5
5411	Maui	SECOR				
6011	Maui	BC-4	2001.2	-22992.3	-10965.0	0.5
5411	Maui	SECOR				
9012	Maui	BN	1951.7	-22873.4	-11000.9	0.5
6011	Maui	BC-4				
9012	Maui	BN	-49.5	118.9	-35.9	0.5
5410	Midway	SECOR				
2724	Midway	Doppler	-882.6	1911.2	-1481.4	0.5

15 meters was a reasonable value for the standard deviation of a single height determination and derived weights for the height constraint equations from this figure. Even though they had relatively low weights, these constraint equations effectively nullified the cantilever effect and greatly improved the determination of station positions at the western end of the network.

5. The Baker-Nunn station on Maui was selected as the origin of the system. Its coordinates in the SAO 1969 Standard Earth System (see Table 1) were constrained with weights based on the standard deviations as given by SAO [3].

The external information described in the five items above have resulted in 18 positional, 4 directional, and 10 height constraint equations, a total of 32.

### 3.2 Observational Data

As a first step in selecting our final data set, it was necessary to find a set that was at least internally consistent. We performed many adjustments in the geometric mode, often deleting, and sometimes adding, data until we arrived at a set of residuals that were reasonably small and fairly randomly distributed. Using the inner adjustment procedure, and after a great deal of trial and error, we obtained a set of coordinates for nine of the ten stations, from Truk Island to Midway, that was internally consistent, yielding an a posteriori estimate for the standard deviation of a single range

observation of slightly more than 5 meters. Since all of the GEOS-I data from Maui gave quite large residuals, we were not able to extend the network to Maui with the GEOS-I data available in the Data Center. Therefore, we requested and received EGRS-7 data from the U.S. Army Topographic Command to connect Maui to Kusaie, Johnston and Midway Islands. This data brought the standard deviation, estimated a posteriori, up to about 9 meters. However, we felt that this was about the best set of data we could hope to get without error modeling, since removing any of the data with the larger residuals would have ruined the geometrical integrity of the network. With this data and with external constraints similar to those described in the previous section, we reached our solution SP-5 reported in [1].

Next, we reexamined the data that had previously been deleted. We suspected that much of this was good data, except that the observations contained constant biases. These constant biases are made up of ambiguities, which occur in multiples of 256 meters, and calibration errors, which are generally under 30-40 meters. By performing short-arc orbital mode adjustments in which the station coordinates were all constrained, we were able to solve for biases for those subsets of the data that constituted passes of reasonable length. Calibration corrections were also recovered for some of the data that had previously been used in geometric mode adjustments. The observations for which constant biases had been recovered were corrected, and then added into the set of usable data. Since very few of the passes lasted over ten minutes and covered significant ranges in altitude, no attempt was made to solve for refraction or other error model terms.

It was also possible to make reasonable estimates of the calibration errors for some of the data that constituted only a very short segment of an arc. In many instances we noted that the residuals for a given station in the geometric mode solutions were fairly large, constant and of the same sign. For these observations, the mean residuals served as estimates of the calibration errors.

### 3.3 Results

In the final (SP-7) solution, we used a total of 1188 range observations (at 4° - 60° intervals) which, with the 32 external constraint equations, resulted in 287 degrees of freedom. The adjusted station coordinates in the SAO 1969 Standard Earth System are presented in Table 3.

The standard deviation of a single range estimated from the final solution was 3.2 meters, which indicates that most of the systematic errors have been removed.

Table 4 gives the geodetic coordinates on the NAD datum. To

transform the coordinates from the SAO system to the NAD, the following translation parameters were used:  $\Delta x = 38$  m,  $\Delta y = -164$  m,  $\Delta z = -175$  m. These parameters are in the sense NAD-SAO [6].

#### 4. Conclusions

Our experiences with the SECOR observations of GEOS-I in the Pacific indicate that with a great deal of effort one can obtain satisfactory solutions. Since none of the observing stations are positioned on major datums, external information must be used to tie the network into existing coordinate systems. Since ambiguity and calibration corrections can be extracted reliably only from those data subsets that constitute passes, and only a very few of the passes are long enough to allow the use of an error model more extensive than the single constant bias term, systematic errors are still suspected to be present in some of the data.

The solutions for the station coordinates (Tables 3 and 4) appear to be completely valid. The standard deviations of the coordinates are all acceptable. There seems to be some rise in the standard deviations toward the western and southern parts of the network, probably because all direction control is in the north-eastern part of the net. If ballistic camera data or other directional information were available from some of the stations on the western end, the whole network could be further strengthened.

More details of this investigation may be found in [7].

#### Acknowledgement

The work described in this paper was supported by Grant NGL 36-008-093 from the National Aeronautics and Space Administration.

Table 3. SAO-1969 Standard Earth Coordinates  
(Solution SP-7)

GOCC #	Name		Coordinates (m)	$\sigma(m)$
5401	Truk	x	-5 576 050	12
		y	2 984 667	12
		z	822 438	15
5402	Swallo	x	-6 097 450	8
		y	1 486 518	15
		z	-1 133 224	10
5403	Kusaie	x	-6 074 527	8
		y	1 854 359	10
		z	583 838	11
5404	Gizo	x	-5 805 394	9
		y	2 485 342	14
		z	- 892 882	12
5405	Tarawa	x	-6 327 924	7
		y	784 583	11
		z	150 834	9
5406	Nandis	x	-6 070 207	11
		y	270 690	18
		z	-1 932 851	11
5407	Canton	x	-6 304 308	9
		y	- 917 626	13
		z	- 307 106	9
5408	Johnston	x	-6 007 981	5
		y	-1 111 240	8
		z	1 824 156	7
5410	Midway	x	-5 618 721	10
		y	- 258 217	10
		z	2 997 241	10
5411	Maui	x	-5 468 010	6
		y	-2 381 410	7
		z	2 253 175	7

Table 4. North American Datum Coordinates  
 (Solution SP-7)

GOCC #	Name	Latitude	$\sigma$	Longitude (+E)	$\sigma$	Height	$\sigma$
5401	Truk	7° 27' 27".1	0.5	151° 50' 33".2	0.4	-127 m	12 m
5402	Swallo	-10 18 18.7	0.3	166 18 01.1	0.5	- 39	8
5403	Kusaie	5 17 10.4	0.3	163 01 32.0	0.4	- 84	7
5404	Gizo	- 8 06 12.7	0.4	156 49 30.1	0.5	- 21	10
5405	Tarawa	1 21 45.9	0.3	172 56 0.7	0.4	- 95	6
5406	Nandis	-17 45 36.8	0.3	177 26 53.6	0.6	53	11
5407	Canton	- 2 46 48.8	0.3	188 16 59.0	0.4	- 23	9
5408	Johnston	16 43 44.0	0.2	190 28 50.2	0.3	-105	5
5410	Midway	28 12 45.4	0.3	182 37 58.6	0.4	-121	10
5411	Maui	20 49 24.6	0.2	203 32 7.9	0.2	- 24	6

### References

- [1] Mueller, Ivan I., et. al. "Experiments with SECOR Observations on GEOS-I", Presented at the GEOS-II Review Conference, Goddard Space Flight Center, NASA, June 22-24, 1970.
- [2] Rinner, Karl, Karl Killian, Peter Meissl. "Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im Raum". Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 61, München, 1969. (In English as: Rinner, Karl. "Systematic Investigations of Geodetic Networks in Space," Annex F. U.S. Army European Research Office, 1966. AD-482852).
- [3] Gaposchkin, E.M., Kurt Lambeck. "1969 Smithsonian Standard Earth (II)", Special Report No. 315, Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Massachusetts, 1970.
- [4] Huber, Donovan N. "Johnston Island Preliminary Satellite Network Coordinates". ACIC Technical Report No. 113. St. Louis, Missouri, 1969.
- [5] Anderle, Richard J., Steve J. Smith. "NWL-8 Geodetic Parameters Based on Doppler Satellite Observations". Technical Report No. 2106. Naval Weapons Laboratory, Dahlgren, Virginia, 1967.
- [6] Badekas, John. "Investigations Related to the Establishment of a World Geodetic System", Report No. 124, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1969.
- [7] Mueller, Ivan I., et. al. "Secor Observations in the Pacific", Report No. 140, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1970.

100% (1)

AM 183

(c)

AM 181

(d)

(e)

Prof. Dr. H. Peschel, Technische Universität Dresden

### Kontinentale Höhennetze und Meeresniveau

Die Erforschung rezenter Erdkrustenbewegungen hat in den letzten Jahren große Bedeutung für die Geowissenschaften erlangt, nachdem mit Hilfe der dynamischen Satellitengeodäsie die Genauigkeit der Abplattung des Erdellipsoids um eine Größenordnung gesteigert werden konnte, die den derzeitigen Forderungen der wissenschaftlichen Erkundungsforschung entspricht. Theoretische Arbeiten zum Studium des Aufbaus der Erdkruste und des Erdinnern benötigen Beobachtungen über das Verhalten der Erdoberfläche, deren Interpretation mit dem experimentellen Nachweis Beiträge zur Theorie der geotektonischen Forschung liefert. Praktische Bedeutung haben diese Arbeiten vor allem für die Erdbebenprognose und für die Voraussage von Küstenveränderungen, um durch entsprechende Maßnahmen Katastrophen verhüten oder zum mindesten deren Auswirkungen mindern zu können.

Die Erdkrustenbewegungen werden durch die Raumvektoren der Festpunktbewegungen an der Erdoberfläche dargestellt. Die geodätische Bestimmung dieser meist sehr kleinen Vektoren erfordert Messungen höchster Präzision, wobei sie in Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegt werden. Die geodätische Meßtechnik ermöglicht heute, die vertikalen Krustenbewegungen eine Größenordnung genauer zu bestimmen als die horizontalen. Trotzdem gelingt es bisher nur, relative Bewegungen benachbarter Festpunkte zu erfassen, während die absoluten Änderungen von der Konstanz der Bezugsniveauplätze des verwendeten Höhensystems abhängen.

Meist werden die relativen Höhenänderungen der Festpunkte auf einen Ausgangspunkt bezogen, der nach geologischen Untersuchungen größte Stabilitätswahrscheinlichkeit besitzt. Dennoch ist bekannt, daß auch derartige Anschlußpunkte noch geringfügigen tektonischen Bewegungen unterliegen, die durch genaueste Verbindungsmessungen unter Kontrolle gebracht werden müssen. Diesen Zweck erfüllen die Haupthöhennetze als Grundlage des Höhensystems einer Landesvermessung. Die Verbindungen dieser Haupthöhennetze untereinander ergeben dann die kontinentalen, von den Weltmeeren begrenzten Höhennetze. Die gemeinsame Auswertung dieser Kontinentalnetze ergibt eine erste Kontrolle der Stabilität der genannten Anschlußpunkte nationaler Höhennetze innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Feinnivelements, die heute bei modernsten Messungen etwa bei  $\pm 0,3$  mm/km liegen. Erstreckt sich die Verbindung zweier Anschlußpunkte beispielsweise über 5000 km, so beträgt die Unsicherheit des zwischen ihnen bestehenden Höhenunterschiedes bereits  $\pm 2$  cm.

Da theoretisch die ruhende Meeresoberfläche als Oberfläche des Geoids gelten kann, werden die Haupthöhennetze auf diese ruhende Meeresoberfläche bezogen. Infolge der Gezeiten und zahlreicher anderer Störeffekte durch Strömungen, Wind, Zentrifugalkräfte und Dichteschwankung weicht das tatsächliche Meeresniveau bis zu mehreren Metern von dieser fiktiven Ruhelage ab. Durch Beobachtungen des Meeresniveaus mit Hilfe von Pegelstationen entlang der Küstenlinien der Kontinente wird versucht, aus den Registrierdaten der Mareographen über lange Zeiträume das Mittelwasser abzuleiten und zu den Höhen der Pegelnullpunkte in Beziehung zu bringen, die ihrerseits mit dem Haupthöhennetz verbunden sind. Auf diese Weise entsteht theore-

tisch ein geschlossenes Höhensystem über die gesamte Erdoberfläche hinweg, mit dem das Studium der Erdkrustenbewegungen eine einheitliche Ausgangsbasis erhält. Nicht erfaßt werden dabei jedoch Höhenänderungen, die als Änderungen der Radiusvektoren von Oberflächenpunkten entsprechend den Hypothesen von Schrumpfung oder Quellung des Erdkörpers entstehen. Diese Beträge lassen sich nur über Zeiträume von Jahrhunderten als Änderungen der Parameter der Erdfigur erfassen.

Das Symposium über Küstengeodäsie, das von der Studiengruppe 2.22 der Internationalen Assoziation für Geodäsie gemeinsam mit dem Komitee für Gezeiten und Mittleren Meeresspiegel der Internationalen Assoziation für Physikalische Wissenschaften des Ozeans im Juli 1970 in München veranstaltet wurde, zeigte den derzeitigen Stand der Forschungsarbeiten für dieses einheitliche globale Höhensystem auf. Sowohl die Schaffung kontinentaler Höhennetze als auch die Bestimmung des mittleren Meeresniveaus stellt noch große Anforderungen an die an diesen Problemen mitarbeitenden Wissenschaftler und Praktiker, denn sie stehen wie bei der Erforschung rezenter Erdkrustenbewegungen erst am Anfang. Die Steigerung der geodätischen und geophysikalischen Meßgenauigkeit während der letzten zwei Jahrzehnte läßt heute bereits Meßdaten erfassen, mit denen vertikale Krusten- und Meeresspiegelbewegungen über weite Räume signifikant nachgewiesen werden können.

Kontinentale Höhennetze entstehen durch umfassende wissenschaftliche und praktische Zusammenarbeit der Staaten des betreffenden Kontinents. Am besten konnte

in dieser Hinsicht das Höhennetz Australiens bearbeitet werden, deren Netzlinien von insgesamt 85000 km Länge mit 30 Pegelstationen rings um den Kontinent verbunden wurden. Damit sind wertvolle Grundlagen für das Studium relativer Vertikalbewegungen zwischen dem Meeresspiegel der Ozeane und dem Festland des australischen Kontinents geschaffen worden. Durch statistische Auswertung des vorliegenden Messungsmaterials nach den verschiedenen Tests können sowohl die Vertrauensintervalle festgelegt als auch Richtlinien für analoge Arbeiten auf anderen Kontinenten aufgestellt werden.

Ähnlich günstige Voraussetzungen liegen auf dem nördlichen Teil des amerikanischen Kontinents vor, da nur die zwei Staaten USA und Kanada an der Realisierung eines solchen Forschungsprojektes beteiligt sind, die bisher auf geodätischem Gebiet schon zahlreiche Beispiele erfolgreicher Kooperation gegeben haben. Ungünstig liegen die Verhältnisse in Südamerika, weil dort an vielen Stellen genaue Höhennetze noch nicht geschaffen wurden. Das gleiche gilt für den größten Teil Afrikas.

In Europa und Asien sind zwar weitgehend die geodätischen Grundlagen vorhanden, jedoch bereitet die Realisierung einer wissenschaftlichen Kooperation zwischen den Staaten entgegengesetzter Gesellschaftsordnung und Wirtschaftssysteme zur Zeit noch Schwierigkeiten. Das westeuropäische REUN und das osteuropäische Normalhöhensystem, das sich auf sowjetischem Territorium bis zur Pazifikküste erstreckt, müssen deshalb noch getrennt bearbeitet werden. Damit sie später vereinigt werden können, ist der wissenschaftliche Erfahrungsaustausch auf internationaler Ebene

über die IUGG und die angeschlossenen Assoziationen, im besonderen über die AIG mit ihren Sektionen und Studiengruppen notwendig. Es gilt, durch Diskussionen auf wissenschaftlichen Symposien die optimalen Verfahren und Geräte herauszuarbeiten sowie Empfehlungen für Konventionen vorzubereiten, die von den Wissenschaftlern der verschiedenen Länder den staatlichen Leitungen zur Annahme unterbreitet werden. Diese Messungen sind sehr umfangreich und benötigen große finanzielle Mittel. Ihr Einsatz muß stets mit hohem Nutzeffekt für die Volkswirtschaft verbunden sein.

Das REUN stellt die erste Stufe eines kontinentalen Höhennetzes in Westeuropa dar. Dr. O. Simonsen hat mit seiner Bearbeitung der REUN zahlreiche nationale Höhennetze miteinander verbunden und einer gemeinsamen Ausgleichung unterzogen. Dabei bot sich die Gelegenheit, das günstigste Ausgleichungsverfahren für große Höhennetze auszuwählen und zu erproben. Infolge des heterogenen Beobachtungsmaterials kommt den ermittelten Festpunktihöhen jedoch nur eine erste Näherungsfunktion zu, wie die Ergebnisse der jetzt abgeschlossenen Neubeobachtung des französischen Höhennetzes I. O. zeigen. Die dort aufgetretenen Differenzen bis zu 60 cm gegenüber bisherigen Höhenangaben beruhen im wesentlichen auf der unterschiedlichen inneren Genauigkeit der beiden zeitlich weit auseinander liegenden Messungen. Die Neuberechnung des REUN mit den verbesserten Daten durch den Einsatz von Rechenautomaten erfordert keinen sehr hohen Aufwand, so daß die Qualität des REUN schrittweise durch Einfügen neuer Beobachtungen jederzeit gesteigert werden kann.

Das Normalhöhennetz der sozialistischen Staaten in Osteuropa beruht auf gegenseitigen Vereinbarungen über einheitliche Beobachtungsverfahren und basiert dem REUN gegenüber auf sehr homogenem Datenmaterial. Die Ergebnisse haben eine hohe Aussagekraft. Die in den nächsten Jahren vorgesehenen Wiederholungsmessungen auf den Hauptlinien ergeben ein kontinentales Teilnetz großen Umfangs. Die Beobachtungen werden ebenfalls nach einheitlichen Verfahren von den beteiligten Ländern durchgeführt. Sie bilden eine gute Grundlage für die Ableitung signifikanter Werte der Vertikalkomponenten rezenter Krustenbewegungen.

Voraussetzung für die Anlage kontinentaler Höhennetze, die den derzeit höchsten Stand der wissenschaftlichen Erkenntnis berücksichtigen, ist die Erarbeitung von internationalen Standards für die Festpunktvermarkung, für die Linienführung, für das optimale Beobachtungsverfahren und für die wissenschaftlich begründeten Fehlergrenzen. Bei der Auswertung sind die während des gesamten Beobachtungszeitraumes auftretenden Veränderungen infolge Krustenbewegung auf eine mittlere Epoche zu reduzieren. Die Auswertung ermöglicht eine Kritik der Stabilität der nach geologischen Gesichtspunkten ausgewählten Festpunktgruppen. Um 1980 wird somit ein für weitere wissenschaftliche Untersuchungen geeignetes kontinentales Teilnetz vorliegen, das sich von der Elbe quer durch Asien bis zum pazifischen Küstengebiet erstreckt und in Verbindung mit zahlreichen Pegelstationen entlang der berührten Küstenlinien wertvolle geowissenschaftliche Informationen liefern wird.

Für diesen Zweck werden für die Datenerfassung und -verarbeitung an den Pegelstationen ebenfalls einheitliche Richtlinien gefordert. Das bereits angeführte Münchener Symposium ließ klar erkennen, welche Unvollkommenheiten die wissenschaftliche Zusammenarbeit auf diesem Gebiet noch aufweist. So wertvoll die über ein Jahrhundert und länger gesammelten Pegelmeßwerte für Zwecke der Schiffahrt und für erste Untersuchungen auch sein mögen, den heutigen Anforderungen für die Erforschung von Küstenveränderungen in Verbindung mit der Erfassung von Niveauschwankungen des Meeresspiegels genügen sie nicht. Für diese Feinbeobachtungen werden Kenntnisse über die Störeinflüsse am Mareographen und auf den Meeresspiegel in der näheren Umgebung der Pegelstation gebraucht. Weiterhin muß versucht werden, Meeresspiegelbeobachtungen auf dem offenen Meer auszuführen. Dieses meßtechnische Problem weist höchste Schwierigkeitsgrade auf und ist noch ungelöst.

Gelingt es bei Höhennetzen auf dem Festlande infolge der hohen Präzision der Beobachtungen bereits, einzelne Störeffekte mit Ausnahme der nivellitischen Refraktion sehr genau zu erfassen, so liegen die Verhältnisse bei Mareographenregistrierungen weit ungünstiger, denn die Restfehler erreichen zwei Größenordnungen höhere Beträge als beim Präzisionsnivellament. Intensive Forschungen, an denen Ozeanographen mit Geodäten und Konstrukteuren des wissenschaftlichen Gerätebaus komplex arbeiten, werden zur Klärung der verschiedenen Störeffekte wie Beschleunigung durch Meereströmungen, Zentrifugal- und Corioliskräfte, Wind- und Bodenreibung sowie durch Luftdruckänderung beitragen, um sie meßtechnisch erfassen und als Korrekturen berücksichtigen zu können.

Wichtig ist weiterhin, daß die Daten der Mareographen durch Fernregistrierung in ein Auswertezentrum übermittelt und dort zentral ausgewertet werden können, wie es in Kanada stellenweise schon geschieht. Dazu sind noch umfangreiche Entwicklungsarbeiten an den Mareographen selbst notwendig. Die Standardisierung dieser Geräte in internationalem Rahmen hat deshalb herausragende Bedeutung, um beim Vergleich der erzielten Ergebnisse Signifikanz zu erzielen und zu konkreter wissenschaftlicher Interpretation zu gelangen.

Die Wissenschaftler stehen auch bei der Nutzung der Pegelangaben zur Lösung des Problems der Küsten- und Meeresspiegeländerungen erst am Anfang. Die zu erwartenden raschen Fortschritte in der Meßtechnik, die während der letzten zwei Jahrzehnte durch die Einführung elektronischer Meßverfahren die Beobachtungsgenauigkeit auf fast allen Gebieten wesentlich erhöht haben, werden manche der angeführten Probleme schon bald lösen lassen. Die Datenerfassung auf dem offenen Weltmeer wird jedoch erst mit neuen Erkenntnissen der wissenschaftlichen Forschung und ihrer Anwendung auf technischem Gebiet realisiert werden können.

Diese Darlegungen lassen erkennen, daß die Problematik der geowissenschaftlichen Erkundungsforschung nicht geringer geworden ist, sondern im Gegenteil sich stark erweitert hat. Junge Wissenschaftler werden sie bearbeiten und nach dem Vorbild des Jubilars Prof. Dr. Dr. Karl Ledersteger ihre ganze Kraft für ihre Lösung einsetzen. Ihnen das Rüstzeug für diese Arbeiten vermittelt zu haben, ist das große Verdienst Lederstegers mit seiner schöpferischen Forschungsarbeit, wofür ihm die internationale Fachwelt Dank und Anerkennung zuteil werden läßt.

The Mean Density of the Earth Determined from the Vertical Gradient of Gravity

(Preliminary Report)

Miloš Pick, Jan Pícha

Geophysical Institute of Czech.Acad. of Sci., Prague <sup>x/</sup>

The problem of determining the mean density of the Earth by measuring the vertical gradient of gravity in mines was already dealt with in the last century [1]. The first such investigation in the area of ČSSR was carried out by Sterneck [2,3]. He used pendulum measurements at "Adalbert - Mine" in Příbram. At "Anne - Mine" /only at 400 m distance from "Adalbert - Mine"/ the measurements were repeated by Běhounek and Staněk in 1945 and by Staněk in 1946 by means of Graßf gravity meter Gs 4 and by Pícha and Chudoba in 1949 who used gravity meter Norgaard. On the basis of their measurements following data were obtained for the mean density of the Earth:

1882	Sterneck	$\bar{\rho} = 5.77 \text{ g/cm}^3$
1953	Pícha	$\bar{\rho} \approx 5.57 \text{ g/cm}^3$

---

<sup>x</sup>) Adress: Boční II - Praha 4 - Spojilov, Czechoslovakia.

On computing the above values the Earth was supposed to be a sphere in the first approximation.

In 1970 a new measurement was made by Pick using gravity meter Sharpe Canadian CG 2 at "Anne - Mine". With respect to higher accuracy of these gravity measurements, the Earth was replaced by a rotational ellipsoid and new mathematical relations were derived. It holds

$$\chi_{ik} = \frac{\partial \gamma_{ik}}{4\pi f h} + \frac{2}{3} \bar{\chi},$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi} = \frac{3 \gamma_0}{4\pi f a_0} & \left\{ \left( 1 + \frac{d \gamma_{0k}}{\gamma_0} - \frac{H}{a_0} \right) (1 + \alpha \sin^2 \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{3 \omega^2}{8\pi f \bar{\chi}} (3 - 5 \sin^2 \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

where  $\chi_{ik}$  is the density of the surface layer of the Earth.  $\bar{\chi}$  is the mean density of the Earth, and further /see Fig. 1/

$$\partial \gamma_{ik} = \gamma(P_i) - \gamma(P_k), \quad h_{ik} = \widehat{P_i P_k}, \quad H_k = \widehat{P P_k},$$

$$\gamma_0 = \gamma(P_0), \quad d \gamma_{0k} = \gamma(P_0) - \gamma(P_k),$$

$$a = a_0 + da,$$

a being the semiaxis of the reference surface.

The results obtained from computation are summarized in the Table 1.

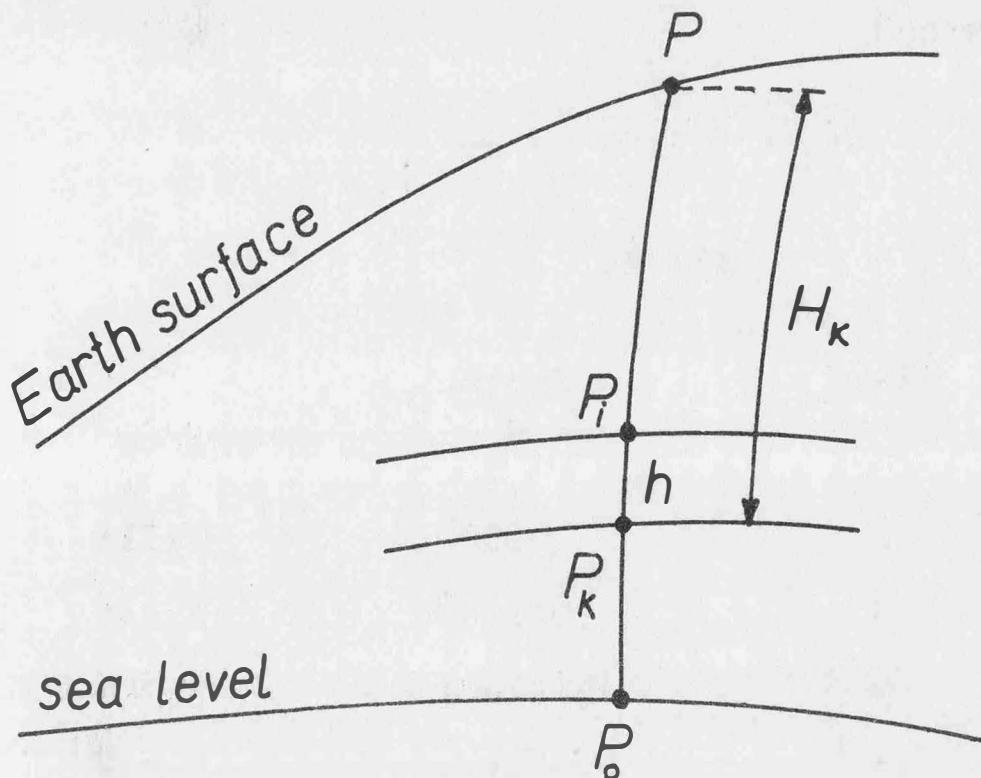


Fig. 1.

The following mean density of the Earth was obtained:

$$\bar{\rho} = 5.51642 \text{ g/cm}^3 .$$

For comparison we computed the mean density of the astronomical ellipsoid. The following were used as starting data:

$$fM = 398603 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{s}^{-2}, f = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2},$$

$$a = 6378160 \text{ m}, \alpha = 1:298.2471671, \omega = 7.2921 \cdot 10^{-5} .$$

We obtained

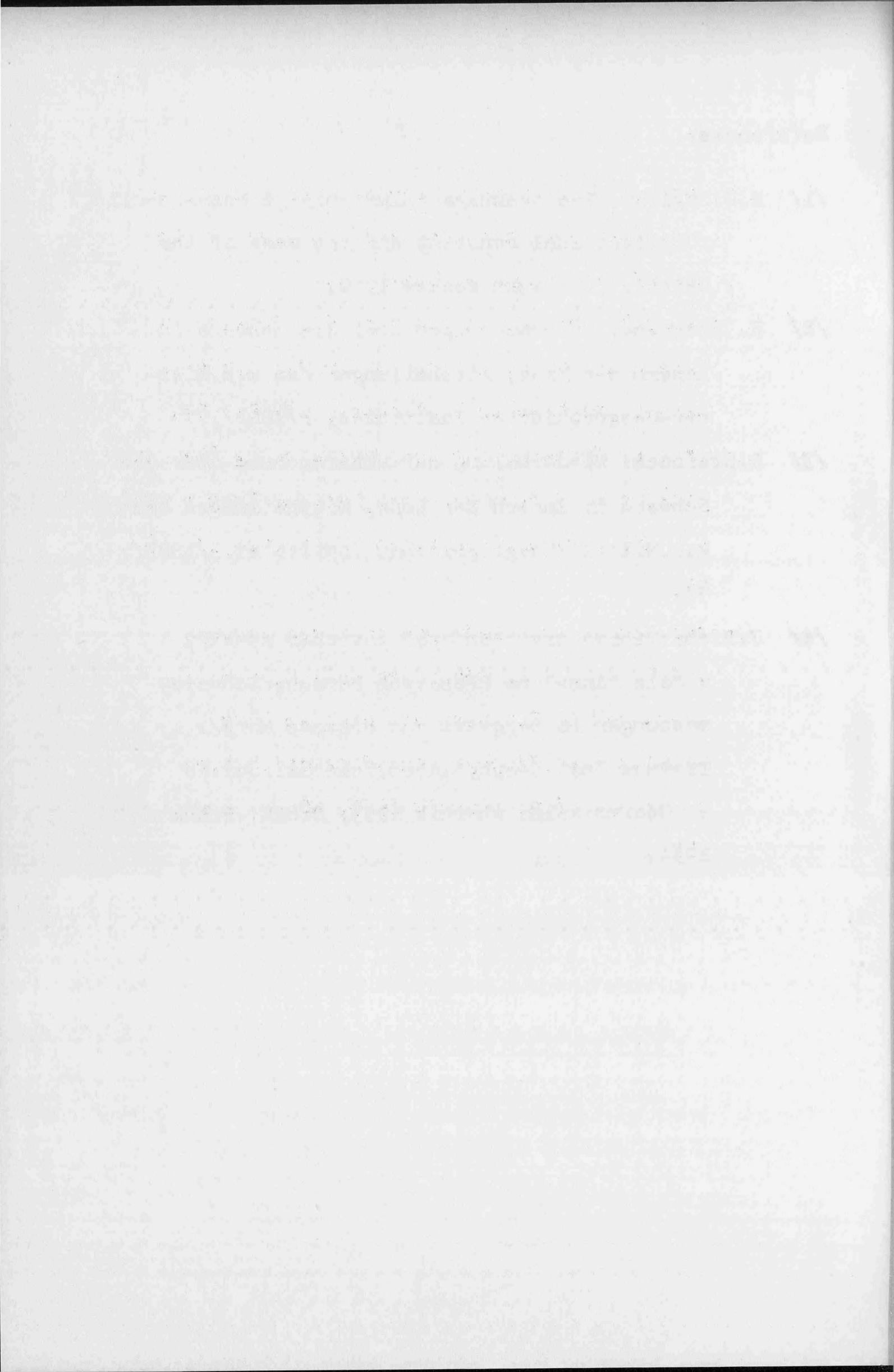
$$\bar{\chi}_a = 5.5169 \text{ g/cm}^3 .$$

Tab. 1.

Floor	Depth m	$\chi$ $\text{g/cm}^3$
0	0.000	2.514
3	109.559	2.645
9	215.091	2.700
14	325.121	2.724
17	427.256	2.743
20	540.128	2.742
23	657.732	2.758
26	763.009	2.758
28	885.285	2.745
30	995.493	2.775
32	1 094.946	2.792
34	1 195.004	2.771
36	1 296.766	2.785
38	1 397.707	2.779
39	1 449.348	

**References:**

- /1/ M.U.Sagitov: Postoyannaya t'jagoteniya i massa zemli  
 /Gravitational constant and the mass of the  
 Earth/. Izd.Nauka Moskva 1969.
- /2/ R. Sterneck: Untersuchungen über die Schwere im  
 Innern der Erde, Mittheilungen des k.k.Mili-  
 tär-Geographischen Institutes, 2/1882/, 77.
- /3/ R.Sterneck: Wiederholung der Untersuchung über die  
 Schwere im Innern der Erde, Mittheilungen des  
 k.k.Militär-Geographischen Institutes, 3/1883/,  
 59.
- /4/ J.Pícha:Tíhové zrychlení pod povrchem zemským  
 v dole "Anna" na Březových Horách./Schwere-  
 messungen im Bergwerk von Březové Hory/.  
 Travaux Inst.Géophys.Acad.Tchécosl.Sci.No  
 9, Geofysikální sborník 1953, NČSAV, Praha  
 1954.



Übertragung astronomischer Azimute  
in der dreidimensionalen Geodäsie.

Von K. Ramsayer, Stuttgart.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, dass aus dem astronomischen Azimut  $A_{ik}^*$  einer Raumstrecke  $P_i P_k$  das astronomische Gegenazimut  $A_{ki}^*$  berechnet werden kann, wenn zusätzlich die astronomischen Breiten und Längen von  $P_i$  und  $P_k$  und wenigstens ein Höhenwinkel  $\beta_{ki}$  oder  $\beta_{ik}$  gemessen werden. Die Formeln werden für ein geozentrisches und ein lokales kartesisches Koordinatensystem angegeben. Schliesslich wird die Laplacesche Gleichung im lokalen kartesischen Bezugssystem hergeleitet, die eine Verallgemeinerung der ellipsoidischen Laplacegleichung darstellt.

1. Einleitung.

Zur Bestimmung der gegenseitigen räumlichen Lage von Netz- oder Polygonpunkten nach den Methoden der dreidimensionalen Geodäsie sind neben der Messung von Strecken, Horizontal- und Vertikalwinkeln astronomische Breiten-, Längen- und Azimutmessungen erforderlich. Hierbei würde, wenn wir von der Genauigkeitssteigerung durch überschüssige Messungen absehen, eine einzige Azimutbestimmung ausreichen, da sich die astronomischen Azimute aller übrigen Seiten streng berechnen lassen. Diese Azimutübertragung ist z.B.

für den dreidimensionalen Polygonzug von besonderer Bedeutung, da sie eine direkte Azimutmessung in den Zwischenpunkten erübrigt und bei einem Zug mit astronomischem Azimutanschluss am Anfang und Ende eine Kontrolle der Richtungsübertragung wie beim normalen Polygonzug ermöglicht. Eine andere interessante Anwendung ist die Zentrierung benachbarter astronomischer Azimute.

Nachstehend wird die Übertragung astronomischer Azimute im geozentrischen und in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem behandelt. Außerdem wird auf die Laplacesche Gleichung im lokalen Koordinatensystem eingegangen.

## 2. Absolute Orientierung einer Raumstrecke.

Messen wir in einem beliebigen Punkt  $P_i$  das astronomische Azimut  $A_{ik}^*$  und den Höhenwinkel  $\beta_{ik}$  bzw. die Zenitdistanz ( $90^\circ - \beta_{ik}$ ) einer beliebig gerichteten Strecke  $P_i P_k$  und bestimmen zusätzlich die Lot- bzw. Zenitrichtung in  $P_i$  durch Ermittlung der astronomischen Breite  $\varphi_i$  und Länge  $\lambda_i$  von  $P_i$ , so ist die Richtung von  $P_i$  nach  $P_k$  relativ zur Äquatorebene und zur Greenwicher Meridianebene eindeutig festgelegt.

Dies soll an Hand von Bild 1 näher erläutert werden. Hier ist die Himmelskugel dargestellt, deren Radius als unendlich angenommen wird, um den Einfluss der Exzentrizitäten der verschiedenen Richtungen zu eliminieren. Ihr Mittelpunkt O falle mit dem in der Nähe des Erdschwerpunkts angenommenen Ursprung des geozentrischen Koordinatensystems zusammen.  $P_n$  ist der

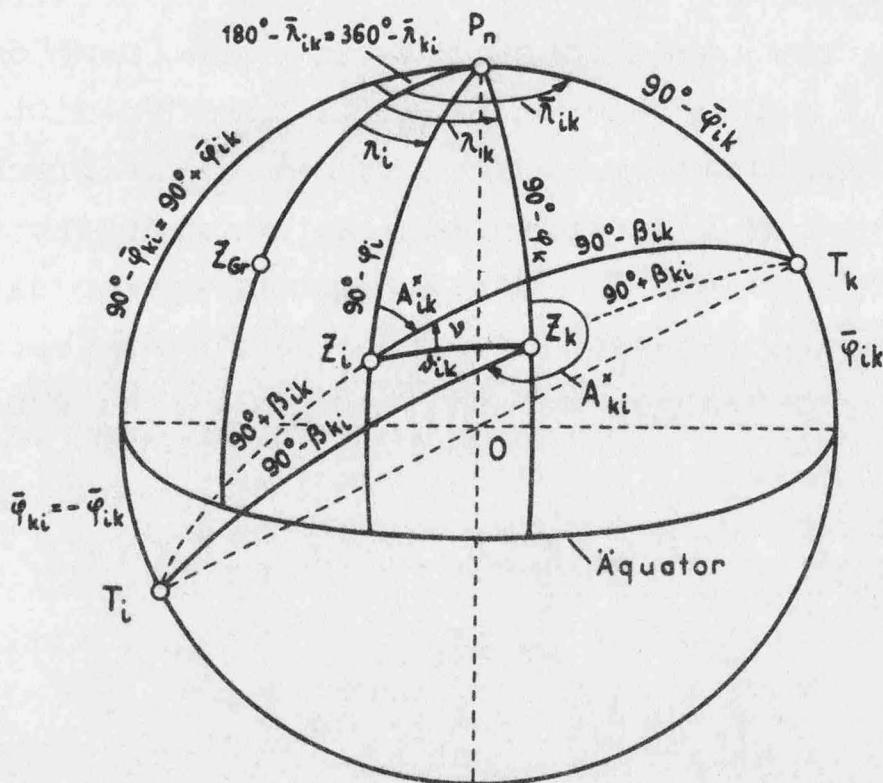


Bild 1

durch die mittlere Erdachse festgelegte Himmelsnordpol.  $Z_i$  und  $Z_k$  sind die Zenitpunkte von  $P_i$  und  $P_k$ . Der Grosskreis  $P_n Z_{nGr}$  entspricht dem mittleren Greenwicher Meridian.  $T_k$  und  $T_i$  sind die Schnittpunkte der Geraden  $P_i P_k$  mit der Himmelskugel.  $Z_i$  und  $Z_k$  sind festgelegt durch die Poldistanzen  $(90^\circ - \varphi_i)$  und  $(90^\circ - \varphi_k)$  und die geographischen Längen  $\lambda_i$  und  $\lambda_k$ .  $T_k$  hat bezogen auf den Zenit  $Z_i$  die Zenitdistanz  $(90^\circ - \beta_{ik})$  und bezogen auf den Meridian von  $Z_i$  das Azimut  $A_{ik}^*$ . Die Lage von  $T_k$  auf der Himmelskugel ist also durch die messbaren Grössen  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $A_{ik}^*$  und  $\beta_{ik}$  festgelegt.

Nunmehr führen wir den Breitenwinkel  $\bar{\varphi}_{ik}$  und den Längenwinkel  $\bar{\lambda}_{ik}$  der Strecke  $P_i P_k$  ein. Wir verstehen darunter den Winkel zwischen  $P_i P_k$  und der mittleren Äquatorebene bzw. den Winkel zwischen der Ebene durch  $P_i P_k$  parallel zur mittleren Erdachse und der mittleren Greenwicher Meridianebene.  $\bar{\varphi}_{ik}$  und  $\bar{\lambda}_{ik}$  entsprechen auch, wie in Bild 1 dargestellt, der geographischen Breite bzw. Länge von  $T_k$ . Diese Größen lassen sich aus den bekannten Größen des sphärischen Dreiecks  $Z_i P_i T_k$  streng berechnen mit Hilfe der Gleichungen

$$\sin \bar{\varphi}_{ik} = \sin \varphi_i \cdot \sin \beta_{ik} + \cos \varphi_i \cdot \cos \beta_{ik} \cdot \cos A_{ik}^*, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{tg}(\bar{\lambda}_{ik} - \lambda_i) = \frac{\sin A_{ik}^*}{\cos \varphi_i \cdot \operatorname{tg} \beta_{ik} - \sin \varphi_i \cdot \cos A_{ik}^*}. \quad (2.2)$$

### 3. Azimutübertragung im geozentrischen Koordinatensystem.

Nach Ermittlung von  $\bar{\varphi}_{ik}$  und  $\bar{\lambda}_{ik}$  lassen sich leicht der Breitenwinkel  $\bar{\varphi}_{ki}$  und der Längenwinkel  $\bar{\lambda}_{ki}$  der Gegenrichtung  $P_k P_i$ , bestimmen, die den geographischen Koordinaten von  $T_i$  entsprechen.

$$\bar{\varphi}_{ki} = -\bar{\varphi}_{ik}, \quad \bar{\lambda}_{ki} = \bar{\lambda}_{ik} \pm 180^\circ \quad (3.1)$$

Bestimmen wir noch die astronomische Breite  $\varphi_k$  und die astronomische Länge  $\lambda_k$  von  $P_k$ , so sind in dem sphärischen Dreieck  $T_i P_i Z_k$ , Bild 1, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, nämlich

$$P_n T_i = 90^\circ - \bar{\varphi}_{ki} = 90^\circ + \bar{\varphi}_{ik}, \quad P_n Z_k = 90^\circ - \varphi_k, \quad 4 T_i P_n Z_k = 360^\circ - \bar{\lambda}_{ki} + \lambda_k.$$

Das astronomische Gegenazimut kann also berechnet werden aus

$$\operatorname{tg} A_{ki}^* = \frac{\sin(\bar{\lambda}_{ki} - \lambda_k)}{\cos \varphi_k \cdot \operatorname{tg} \bar{\varphi}_{ki} - \sin \varphi_k \cdot \cos(\bar{\lambda}_{ki} - \lambda_k)}. \quad (3.2)$$

Aus (2.1), (2.2), (3.1) und (3.2) folgt, dass  $A_{ki}^*$  streng aus  $A_{ik}^*$ ,  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\varphi_k$  und  $\lambda_k$  abgeleitet werden kann.

Für Strecken  $\leq 40$  km und Höhenwinkel  $\leq 45^\circ$  kann nach [1] der zu erwartende Fehler von  $A_{ki}^*$  beurteilt werden mit Hilfe der Näherungsgleichung

$$dA_{ki}^* = dA_{ik}^* + (\sin \varphi_k - \operatorname{tg} \beta_{ki} \cdot \cos \varphi_k \cdot \cos A_{ki}^*)(d\lambda_k - d\lambda_i) + \\ + \operatorname{tg} \beta_{ki} \cdot \sin A_{ki}^*(d\varphi_k - d\varphi_i) + \sin \delta_{ik} \cdot \sin v \cdot \sec^2 \beta_{ki} \cdot d\beta_{ik}. \quad (3.3)$$

Hierin bedeuten  $dA_{ki}^*$ ,  $dA_{ik}^*$ ,  $d\lambda_k$ ,  $d\lambda_i$ ,  $d\varphi_k$ ,  $d\varphi_i$ ,  $d\beta_{ik}$  die Fehler von  $A_{ki}^*$ ,  $A_{ik}^*$ ,  $\lambda_k$ ,  $\lambda_i$ ,  $\varphi_k$ ,  $\varphi_i$ ,  $\beta_{ik}$ .  $\delta_{ik}$  ist der Winkelabstand zwischen  $Z_i$  und  $Z_k$ .  $v$  ist die Richtung von  $\delta_{ik}$  bezogen auf den Vertikal  $Z_i T_k$ . Aus (3.3) folgt, dass ein konstanter Längenfehler, z.B. eine konstante persönliche Gleichung, ohne Einfluss ist, dass sich die Breitenfehler nur bei grösseren Höhenwinkeln auswirken und dass der Einfluss des Höhenwinkelfehlers wegen der Kleinheit von  $\sin \delta_{ik}$  ( $\approx 0,0063$ ) stets vernachlässigt werden kann.

4. Azimutübertragung in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem.

Die astronomischen Azimute können auch in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem übertragen werden, dessen z-Achse mit der Zenitrichtung im Zentralpunkt  $P_o$  zusammenfällt und dessen x- bzw. y-Achse nach astronomisch Nord bzw. Ost weist, [2,3,4,5]. Hier soll nur das Prinzip erläutert werden. Die Übertragungs-<sup>x</sup>gleichungen selbst können [5] entnommen werden. Bild 2 ist wieder eine Darstellung der Himmelskugel.  $Z_o$ ,  $Z_k$  und  $Z_{Gr}$  sind die Zenitpunkte des Zentralpunktes  $P_o$ , des Zielpunktes  $P_k$  und der Greenwicher Sternwarte.  $P_n$  ist der Himmelsnordpol,  $T_i$  der Schnittpunkt der Geraden  $P_k P_i$  mit der Himmelskugel.

Bekannt sind die astronomisch bestimmten Poldistanzen  $90^\circ - \varphi_o$  und  $90^\circ - \varphi_k$  und die Längen  $\lambda_o$  und  $\lambda_k$  von  $Z_o$  und  $Z_k$ , das auf das lokale System reduzierte Azimut  $\bar{A}_{ik}$  von  $P_i$  nach  $P_k$  und die Zenitdistanz  $(90^\circ - \beta_{ki})$  von  $P_k$  nach  $P_i$ . An Stelle von  $\beta_{ki}$  kann auch der Höhenwinkel  $\beta_{ik}$  oder der reduzierte Höhenwinkel  $\bar{\beta}_{ik}$  bzw.  $\bar{\beta}_{ki}$  bekannt sein. Hierauf sei jedoch hier nicht näher eingegangen.  $\bar{A}_{ik}$  sei durch fortgesetzte Übertragung ermittelt worden. Damit ist auch das reduzierte Gegenazimut

$$\bar{A}_{ki} = \bar{A}_{ik} \pm 180^\circ \quad (4.1)$$

bekannt. Im Dreieck  $Z_o P_n Z_k$  lassen sich aus  $(90^\circ - \varphi_o)$ ,  $(90^\circ - \varphi_k)$  und  $\gamma_{ok} = \lambda_k - \lambda_o$  die Winkel  $\epsilon_{ok}$  und  $\epsilon_{ko}$  und der sphärische Abstand  $r_{ok}$  zwischen  $Z_o$  und  $Z_k$  berechnen. Dann kann im Dreieck  $Z_o Z_k T_i$  aus  $\nu_{ok} = \bar{A}_{ki} - \epsilon_{ok}$ ,  $r_{ok}$  und  $(90^\circ - \beta_{ki})$  der Winkel  $\nu_{ko}$  berechnet werden. Das astronomische Azimut der

\* Siehe Seite 8

Strecke  $P_k P_i$  ergibt sich dann aus

$$A_{ki}^* = \varepsilon_{ko} + v_{ko} . \quad (4.2)$$

### 5. Die Laplacesche Gleichung im lokalen kartesischen Koordinatensystem.

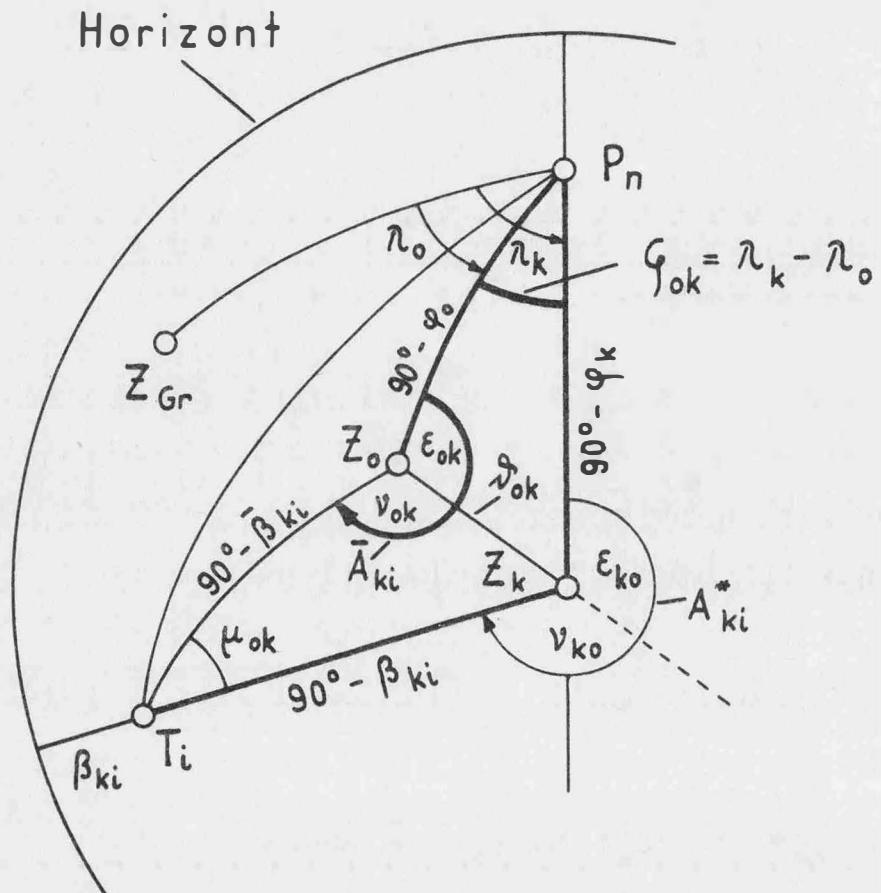
Zwischen dem astronomischen Azimut  $A_{ki}^*$ , dem ellipsoidischen Azimut  $A_{ki}$ , dem Höhenwinkel  $\beta_{ki}$  einer Strecke  $P_k P_i$ , der astronomischen Länge  $\lambda_k$ , der ellipsoidischen Länge  $L_k$ , der ellipsoidischen Breite  $B_k$  und der auf die Richtung der totalen Lotabweichung  $\vartheta$  bezogenen Zielrichtung  $u$  gilt bekanntlich die Laplacesche Gleichung

$$A_{ki}^* - A_{ki} \approx (\lambda_k - L_k) \cdot \sin B_k + \vartheta \cdot \sin u \cdot \operatorname{tg} \beta_{ki} . \quad (5.1)$$

Nachstehend wird gezeigt, dass die Laplacesche Gleichung auch in einem lokalen kartesischen Bezugssystem auftritt und dass die Gleichung für das ellipsoidische Bezugssystem einen Sonderfall dieser allgemeineren Gleichung darstellt.

Nach Bild 2 besteht zwischen dem astronomischen Azimut  $A_{ki}^*$  und dem reduzierten Azimut  $\bar{A}_{ki}$  der Strecke  $P_k P_i$  die Beziehung

$$A_{ki}^* - \bar{A}_{ki} = (\varepsilon_{ko} - \varepsilon_{ok}) + (v_{ko} - v_{ok}) . \quad (5.2)$$



## Bild 2

Nun gilt im Dreieck  $Z_o P_n Z_k$  und im Dreieck  $Z_k T_i Z_o$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon_{k_0} - \varepsilon_{o_k}}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_k - \varphi_o}{2}}{\cos \frac{\varphi_k - \varphi_o}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda_k - \lambda_o}{2}, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\nu_{ko} - \nu_{ok}}{2} = \frac{\sin \frac{\beta_{ki} + \bar{\beta}_{ki}}{2}}{\cos \frac{\beta_{ki} - \bar{\beta}_{ki}}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\mu_{ok}}{2} . \quad (5.4)$$

Dabei ist

$$\sin \mu_{ok} = \frac{\sin \vartheta_{ok} \cdot \sin v_{ok}}{\cos \beta_{ki}} = \frac{\sin \vartheta_{ok} \cdot \sin (\bar{\alpha}_{ki} - \varepsilon_{ok})}{\cos \beta_{ki}}, \quad (5.5)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{ok} = \frac{\sin (\alpha_k - \alpha_o)}{\cos \varphi_o \cdot \operatorname{tg} \varphi_k - \sin \varphi_o \cdot \cos (\alpha_k - \alpha_o)}, \quad (5.6)$$

$$\cos \vartheta_{ok} = \sin \varphi_o \cdot \sin \varphi_k + \cos \varphi_o \cdot \cos \varphi_k \cdot \cos (\alpha_k - \alpha_o) \quad (5.7)$$

oder für kleine Werte von  $\vartheta_{ok}$

$$\vartheta_{ok} \approx \sqrt{(\varphi_k - \varphi_o)^2 + (\alpha_k - \alpha_o)^2 \cdot \cos \varphi_o \cdot \cos \varphi_k}. \quad (5.7a)$$

Ferner ist nach [5]

$$\operatorname{tg} \frac{90^\circ - \bar{\beta}_{ki}}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta_{ok} + (90^\circ - \beta_{ki})}{2} \cdot \cos \frac{\mu_{ok} + v_{ok}}{2}}{\cos \frac{\mu_{ok} - v_{ok}}{2}}. \quad (5.8)$$

Aus (5.3)...(5.5) folgt für kleine Werte von  $\vartheta_{ok}$  und  $\varphi_o \approx \varphi_k$ ,  $\bar{\beta}_{ki} \approx \beta_{ki}$  in erster Näherung

$$\varepsilon_{ko} - \varepsilon_{ok} \approx (\alpha_k - \alpha_o) \cdot \sin \varphi_k, \quad (5.3a)$$

$$v_{ko} - v_{ok} \approx \mu_{ok} \cdot \sin \beta_{ki} \approx \vartheta_{ok} \cdot \sin v_{ok} \cdot \operatorname{tg} \beta_{ki}. \quad (5.4a)$$

Hiermit folgt aus (5.2)

$$A_{ki}^* - \bar{A}_{ki} \approx (\lambda_k - \lambda_o) \cdot \sin \varphi_k + \vartheta_{ok} \cdot \sin \nu_{ok} \cdot \tan \beta_{ki}. \quad (5.9)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie (5.1). Sie kann deshalb als Laplacesche Gleichung im lokalen kartesischen Koordinatensystem bezeichnet werden.

Lassen wir  $Z_o$  mit dem ellipsoidischen Zenitpunkt von  $P_k$  zusammenfallen, so wird  $\varphi_o = B_k$ ,  $\lambda_o = L_k$ ,  $\bar{A}_{ki} = A_{ki}$ ,  $\vartheta_{ok} = \vartheta$  und  $\nu_{ok} = u$ . Dann ergibt sich aus (5.9) unmittelbar die ellipsoidische Laplacegleichung (5.1).

Es sei noch darauf hingewiesen, dass sich alle Parameter der Laplacegleichung (5.9) aus Winkelmessungen allein ableiten lassen, während bei der ellipsoidischen Laplacegleichung (5.1) für die Ermittlung der geographischen Koordinaten  $B_k$  und  $L_k$  ausser Winkelmessungen auch noch eine oder mehrere Streckenmessungen erforderlich sind.

Lassen wir den Zentralpunkt des lokalen Bezugssystems mit  $P_i$  bzw.  $Z_o$  mit  $Z_i$  zusammenfallen, so wird unter Beachtung von Bild 1 und 2

$$\bar{A}_{ki} = \bar{A}_{ik} \pm 180^\circ = A_{ik}^* \pm 180^\circ, \quad \varphi_o = \varphi_i, \quad \lambda_o = \lambda_i, \quad \vartheta_{ok} = \vartheta_{ik},$$

$$\varepsilon_{ok} = \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ko} = \varepsilon_{ki}, \quad \nu_{ok} = \nu_{ik} = A_{ik}^* \pm 180^\circ - \varepsilon_{ik},$$

$$\nu_{ko} = \nu_{ki}, \quad \mu_{ok} = \mu_{ik}, \quad \bar{\beta}_{ki} = -\beta_{ik}.$$

Damit ergibt sich aus (5.2)...(5.9)

$$A_{ki}^* - A_{ik}^* \pm 180^\circ = (\varepsilon_{ki} - \varepsilon_{ik}) + (v_{ki} - v_{ik}), \quad (5.10)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon_{ki} - \varepsilon_{ik}}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_k + \varphi_i}{2}}{\cos \frac{\varphi_k - \varphi_i}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda_k - \lambda_i}{2}, \quad (5.11)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v_{ki} - v_{ik}}{2} = \frac{\sin \frac{\beta_{ki} - \beta_{ik}}{2}}{\cos \frac{\beta_{ki} + \beta_{ik}}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\mu_{ik}}{2}, \quad (5.12)$$

$$\sin \mu_{ik} = \frac{\sin \vartheta_{ik} \cdot \sin v_{ik}}{\cos \beta_{ki}} = \frac{-\sin \vartheta_{ik} \cdot \sin (A_{ik}^* - \varepsilon_{ik})}{\cos \beta_{ki}}, \quad (5.13)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{ik} = \frac{\sin (\lambda_k - \lambda_i)}{\cos \varphi_i \cdot \operatorname{tg} \varphi_k - \sin \varphi_i \cdot \cos (\lambda_k - \lambda_i)}, \quad (5.14)$$

$$\cos \vartheta_{ik} = \sin \varphi_i \cdot \sin \varphi_k + \cos \varphi_i \cdot \cos \varphi_k \cdot \cos (\lambda_k - \lambda_i) \quad (5.15)$$

oder für kleine Werte von  $\vartheta_{ik}$

$$\vartheta_{ik} \approx \sqrt{(\varphi_k - \varphi_i)^2 + (\lambda_k - \lambda_i)^2 \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \varphi_k}. \quad (5.15a)$$

Aus (5.9) folgt für den Sonderfall, dass der Zentralpunkt mit  $P_i$  zusammenfällt

$$A_{ki}^* - (A_{ik}^* \pm 180^\circ) \approx (\lambda_k - \lambda_i) \cdot \sin \varphi_k + \vartheta_{ik} \cdot \sin v_{ik} \cdot \operatorname{tg} \beta_{ki}. \quad (5.16)$$

Werden in  $P_i$  und  $P_k$  die astronomischen Längen und Breiten sowie die Azimute  $A_{ik}^*$  und  $A_{ki}^*$  und die Höhenwinkel  $\beta_{ki}$  und/oder  $\beta_{ik}$  gemessen, so stellen die Gleichungen (5.10)...(5.12) bzw. (5.16) Bedingungsgleichungen dar, die nach Einsetzen der gemessenen Größen erfüllt werden sollen.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass aus den beiden astronomischen Azimuten  $A_{ik}^*$  und  $A_{ki}^*$ , den astronomischen Breiten  $\varphi_i$  und  $\varphi_k$  und dem Höhenwinkel  $\beta_{ki}$  oder  $\beta_{ik}$  die Längendifferenz  $\lambda_k - \lambda_i$  ermittelt werden kann.

### Literatur

- [1] K.Ramsayer: Dreidimensionaler Polygonzug im geozentrischen Koordinatensystem. Zeitschrift für Vermessungswesen 1970, im Druck.
- [2] K.Ramsayer: Raumtriangulation in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. Zeitschrift für Vermessungswesen 1965, S.15-22.
- [3] K.Ramsayer: Erprobung und Erweiterung des Verfahrens der räumlichen Triangulation in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. Deutsche Geodätische Kommission. Reihe A: Höhere Geodäsie, Heft Nr.60, München 1968.
- [4] K.Ramsayer: Spatial Triangulation in a local, astronomical oriented Cartesian coordinate system. Bulletin Géodésique 1969, S.123-137.
- [5] K.Ramsayer: Dreidimensionaler Polygonzug in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. Acta Geodaetica,Geophysica et Montanistica 1970, im Druck.

Studie über die Stützung von europäischen Netzen,  
mit Hilfe von Messungen nach Satelliten. <sup>x)</sup>

v. K. Rinner

1) Allgemeine Betrachtungen

Grundlage aller europäischen Landesvermessungen sind geodätische Netze, welche mit terrestrisch ermittelten Richtungen und Strecken gebildet wurden. Diese Netze sind Elemente für ein gesamteuropäisches Netz. In jedem Landesnetz treten Deformationen auf, welche den Maßstab, die Lage und die Orientierung einzelner Netzteile beeinflussen. Die Ursachen dieser Deformationen liegen in Meßfehlern, in der Fortpflanzung der Meßfehler und in Fehlern, welche bei der Übertragung der auf der Erdoberfläche gemessenen Daten auf die Bezugsfläche (Ellipsoid) entstehen. Die erstgenannten Fehler können durch Wiederholung und zusätzliche Messung von Strecken, Winkel und astronomischen Daten (Laplace-Punkte) verringert werden. Projektionsfehler sind aber von physikalischen Gegebenheiten abhängig (Form der Lotlinien und Potentialflächen, Orientierung der Bezugsfläche zum Erdkörper), welche nur näherungsweise bekannt und daher immer wirksam sind.

Die gleichen Ursachen wirken im erhöhten Maß in einem aus Landesnetzen gebildeten europäischen Netz. Dazu kommen noch die aus den heterogenen Meß- und Rechenverfahren der einzelnen Länderanteile folgenden Einflüsse.

---

x) Die Studie entspricht einem der "Internationalen Konferenz über die Methoden und Instrumente d.geod. Punktbestimmung und ihre Anwendung" im Aug. 1970 in Budapest vorgelegten Vortragsmanuskript.

Die Gesamtheit aller Ursachen läßt daher Deformationen erwarten, deren relativer Betrag im Mittel etwa mit 5 Einheiten der sechsten Dezimale angenommen werden muß, in Extremfällen aber auch 10 Einheiten erreichen kann.

Auch für die Ermittlung einheitlicher europäischer Höhen bestehen Schwierigkeiten. Diese beginnen bei der Definition und enden in der Feststellung, daß Höhen zufolge der Gezeitenbewegungen Funktionen der Zeit sind und ihre Beträge im Laufe eines Tages um mehrere Dezimeter ändern können. Die im westlichen Bereich benutzten orthometrischen Höhen lassen sich nur bei Kenntnis der Geologie der Erdkruste zwischen Geoid und Erdoberfläche streng ermitteln. Die für wissenschaftliche Zwecke eingeführten hypothesenfreien geopotentiellen Karten besitzen, wie der Ausgleich des westeuropäischen Höhennetzes (REUN) zeigt, durch Meßfehler bedingte Unsicherheiten, welche Beträge von mehreren Dezimetern entsprechen. Es ist daher noch nicht möglich, die Unterschiede der Mittelwasser der Meere mit höherer als Dezimetergenauigkeit zu bestimmen. Die Höhenunterschiede benachbarter Punkte der Erdoberfläche können aber immer mit höherer Genauigkeit bestimmt werden, als die horizontale Lage.

Aus dem Gesagten folgt die Notwendigkeit, Lage- und Höhennetze, welche große Räume überdecken durch übergeordnete Messungen abzustützen. Es gilt einen festen Rahmen zu schaffen, in welchem diese Netze eingepaßt werden können, um verbesserte Werte für die Lage und Höhe der Netzpunkte zu erhalten und die Fehlerstruktur der Netze zu erkennen.

Für die Planung von übergeordneten Messungen, welche bestehende Triangulationen stützen sollen, bestehen die folgenden Forderungen:

- 1) Die Genauigkeit der Stützungsmessungen muß größer sein, als jene der entsprechenden Daten, welche aus dem zu kontrollierenden Netz folgen.

- 2) Als Stützungsgrößen kommen die Koordinaten bestimmter Punkte, sowie die Richtungskoordinaten oder die Länge bestimmter Seiten in Betracht.
- 3) Im idealen Fall erfolgt die Stützung durch ein räumliches, polyederförmiges Netz, das ausgewählte Punkte der Erdoberfläche miteinander verbindet und dessen Elemente (Richtungskoordinaten und Strecken) unabhängig von den Elementen des zu stützenden Netzes, also aus gesonderten zusätzlichen Messungen abgeleitet werden.

Die Raumentfernung und die Koordinaten der Raumrichtung zwischen zwei weit voneinander entfernten Punkten der Oberfläche der Erde können aus Raumentfernungen und Richtungen abgeleitet werden, welche von den terrestrischen Punkten nach einem genügend hoh liegenden Ziel gemessen werden. Da Ziele im Raum nicht stabilisiert werden können und sich bewegen, müssen die Messungen nach einem solchen Ziel entweder auf allen terrestrischen Stationen gleichzeitig erfolgen, oder bei Kenntnis der Bahnkurve des Ziels zu bekannten Zeitmomenten.

Werden von den gleichen Punkten Messungen nach einer größeren Anzahl von Hochzielen ausgeführt, so entsteht ein überbestimmtes räumliches Netz. Durch Ausgleichung folgen daraus die benötigten Entfernungen und Richtungskoordinaten zwischen den terrestrischen Punkten, sowie die zugeordnete Fehlermatrix (Matrix der Gewichtskoeffizienten). Diese Daten können daher als korrelierte Meßgrößen für die Bildung des terrestrischen Stützungsnetzes angesehen werden.

Als Hochziele kommen entweder Satelliten in Frage, deren Bahnkurve eine günstige Lage zum stützenden Netz besitzt, oder Leuchtsätze, welche mit Raketen oder Sonden in die vorgesehene Position getragen werden. Satelliten können passiv oder aktiv sein. Im ersten Falle werden sie durch reflektiertes Sonnenlicht sichtbar oder durch Laser-Licht, das von der Bo-

denstation ausgesendet wird. Im zweiten Fall senden sie Lichtblitze oder tragen Einrichtungen für die Messung von Entfernungen (SECOR) oder Entfernungsdifferenzen (DOPPLER). Um ungünstige Refraktionseinflüsse zu vermeiden, soll die Höhe des Satelliten etwa der Entfernung zwischen den Bodenstationen entsprechen und die Zenitdistanzen vom Bodenpunkt zum Satellit kleiner als  $60^\circ$  sein. Die Bahn soll die zu bestimmenden Netzseiten möglichst rechtwinkelig überqueren. Polarbahnen entsprechen dieser Forderung zur Erzielung optimaler Konfigurationen nicht, werden aber aus wirtschaftlichen Gründen für weltumspannende Projekte verwendet.

Leuchtsätze werden mit Raketen oder Sonden in ihre Raumpositionen transportiert und senden dort Lichtblitze aus. Aus technischen und wirtschaftlichen Gründen kommen hiefür nur Höhen bis maximal 50 km in Betracht. Daher können damit nur kurze Seiten bis etwa 200 km bestimmt werden. Wegen der günstigeren Beobachtungsbedingungen werden Zenitdistanzen bis  $66^\circ$  zugelassen.

Im westlichen Bereich wurden bisher zahlreiche und verschiedenartige geodätische Satelliten benutzt. Zum Beispiel die passiven Satelliten Echo I, II und PAGEOS und die aktiven Satelliten ANNA, die GEOS-Serie, die Explorer, die TRANET - Serie, welche mit DOPPLER - Meßeinrichtungen, Laser-Reflektoren, Blitzgeräten oder SECOR-Mikrowellen-Entfernungsmeßgeräten versehen sind. Leuchtsätze, welche von metereologischen Sonden getragen werden, sind in Finnland in Verwendung. Schließlich können auch Quasare als feste, unendlich ferne Ziele aufgefaßt werden, welche konstante Frequenzen aussenden, aus welchen die Richtung und Entfernung zwischen terrestrischen Punkten mit hoher Genauigkeit interferometrisch bestimmt werden können (s. [1]).

## 2) Die Genauigkeit der Meßdaten

Elemente für die Bildung eines terrestrischen räumlichen Stützungsnetzes sind je zwei Koordinaten der raumorientierten Richtungen und die Raumentfernungen zwischen den Netzpunkten. Diese werden aus Richtungen und Entfernungen abgeleitet, welche von den Netzpunkten nach Hochzielen gemessen werden.

Koordinaten ( $\alpha, \delta$ ) von Richtungen nach Hochzielen im himmelfesten Aquatorialsystem werden durch photographischen Anschluß an Richtungen nach benachbarten Fixsternen bestimmt. Daraus lassen sich bei Kenntnis der Zeit  $\theta$  der Aufnahme Richtungskoordinaten ( $t = \theta - \alpha, \delta$ ) in einem erdfesten Aquatorialsystem ableiten, das durch die Rotationsachse der Erde und den Meridian der Zeitmessung (Greenwich) bestimmt wird. Entfernungen können aus der Laufzeit oder der Phase von Laser-Licht oder von Mikrowellen ermittelt werden. Differenzen der Entfernungen von einem Bodenpunkt zu verschiedenen Positionen eines Hochziels ergeben sich durch Integration von DOPPLER-Frequenzen.

Die Genauigkeit, mit welcher Richtungskoordinaten, Entfernungen und Entfernungsdifferenzen mit den derzeit verfügbaren Instrumenten und Verfahren ermittelt werden können, geht aus mitgeteilten Ergebnissen von Versuchen und praktischen Arbeiten hervor.

Im PAGEOS Weltnetz des US-Coast and Geodetic Survey (s. [2]) werden Wild BC4 Kammern ( $f=30$  cm oder  $f=45$  cm, Glasplatten  $21 \times 19 \times 0,06$  cm) benutzt, welche fest in azimutaler Position aufgestellt sind. Der Anschluß erfolgt nach dem photogrammetrischen Verfahren mit durchschnittlich 150 Sternen. Die Satellitenspur wird mit Hilfe eines synchronisierten Verschlusses in etwa 500 Punkte zerlegt. Durch Interpolation einer ausgleichenden Kurve erfolgt eine funktionelle Zuordnung zwischen der Zeit und fiktiven Bild-

punkten des Satelliten und die Elimination des Einflußes der Szintilation. Die erreichbare Genauigkeit für Richtungskoordinaten ( $\alpha, \delta$ ) wird mit  $\pm 0''3$  angegeben, die Genauigkeit der Zeitmessung beträgt  $\pm 0^s001$ .

Vom Smithsonian Astrophysical Observatory (SAO) werden Richtungsmessungen mit äquatorial montierten, mitbewegten Kameras (Baker Nunn,  $f=50$  cm, 56 mm Film) ausgeführt [3]. Die Reduktion erfolgt nach dem astronomischen Prinzip mit einer geringen Anzahl von Anschlußsternen. Die Genauigkeit der Richtungskoordinaten für einen einzelnen Bildpunkt wurde mit  $\pm 1''4$  bis  $\pm 2''0$  ermittelt.

In der Schweiz wurde mit einer Schmidt-Kamera nach dem gleichen Reduktionsverfahren eine Genauigkeit von  $\pm 1''0$  erhalten [4].

In allen Fällen kann davon ausgegangen werden, daß die Bildpunkte der Aufnahme mit einer Genauigkeit von  $\pm 1\mu$  bis  $\pm 3\mu$  bestimmbar sind. Für eine Brennweite von  $f$  cm folgt daraus für jede der Richtungskoordinaten eines Bildpunktes eine Genauigkeit von  $(20/f)''$  bis  $(60/f)''$ . Langbrennweite Astrographen müßten daher zu optimalen Genauigkeiten führen. Doch verhindert das geringe Gesichtsfeld eine ausreichende Elimination des Einflußes der Szintilation, sowie der Koordinatenfehler der Anschlußsterne.

Es folgt daher, daß nur bei Verwendung von geeigneten Kammern und einwandfreien Reduktionsverfahren die Richtungskoordinaten nach Satelliten mit einer Genauigkeit von  $\pm 0''3$  bestimmbar sind. Diese Aussage ist unabhängig von der Höhe des Ziels und setzt nur voraus, daß Zenitdistanzen von  $60^\circ$  nicht überschritten werden.

Bei Verwendung von Sonden, welche Lichtblitze in Höhen von 30 bis 40 km wurde in Finnland mit Schmidt-Vaisala Teleskopen ( $f=102$  cm, Film  $9 \times 9$  cm) Richtungskoordinaten mit einer Genauigkeit von  $\pm 0''7$  bestimmt, wenn die Zenitdistanz kleiner als  $66^\circ$  ist [5].

Entfernungsmessungen nach Hochzielen lassen sich mit Laser-Impulsen mit hoher Genauigkeit ausführen. Nach Mitteilungen von Physikern scheint eine Auflösung in der Größenordnung von einigen Zentimetern erreichbar zu sein. Die Genauigkeit der Entfernung soll derzeit etwa  $\pm 1$  m betragen, unabhängig von der zur Länge. Dies deshalb, weil die störenden meteorologischen Einflüsse nur innerhalb der Atmosphäre wirksam sind.

Mikrowellenmessungen sind ungenauer, die vielversprechende Entwicklung der Phasenmessung mit Secor wird voraussichtlich eingestellt und steht in Zukunft wahrscheinlich nicht mehr zur Verfügung.

Dopplermessungen führen zu Entfernungsdifferenzen vom Bodenpunkt zu verschiedenen Positionen des Satelliten. Da Frequenzmessungen sehr genau sind und meteorologische Einflüsse durch Verwendung mehrerer Frequenzen eliminiert werden können, ist die Genauigkeit der Differenzen sehr hoch und kann mit etwa  $\pm 0,1$  bis  $\pm 1,0$  mm/km angenommen werden. Wegen der für Entfernungsdifferenzen bestehenden ungünstigen geometrischen Verhältnisse geben aber Dopplermessungen trotzdem nur wenig gewichtige Beiträge zur Bildung eines geometrischen Stützungsnetzes.

Hingegen scheint die Kombination der einfach auszuführenden Dopplermessungen mit Lasermessungen recht aussichtsreich zu sein.

Die gleichzeitig von zwei Punkten gemessenen orientierten Raumrichtungen nach einem Hochziel bestimmen eine Ebene durch die Verbindungsgeraden der Beobachtungspunkte. Aus zwei solchen Ebenen wird diese daher bestimmt, n gleichzeitig angezielte Hochziele führen zu einem Ausgleichungsproblem mit  $2(n-1)$  Überbestimmungen.

Untersuchungen über optimale Konfigurationen des Satelliten werden in [6] durchgeführt. Als (simplifiziertes) Ergebnis folgt, daß zusammengehörige Richtungen sich möglichst rechtwinklig schneiden und die zugehörigen Ebenen regelmäßig im Raum verteilt sein sollen. Bei Erfüllung dieser Forderungen für n Ziele werden die Richtungskoordinaten der Verbindungsgeraden mit

Fehlern  $m = m_0 \sqrt{2/n}$  bestimmt. ( $m_0$  = mittlerer Fehler der gemessenen Richtungen nach den Hochzielen). Obwohl die zweite Forderung nur für  $n=2$  praktisch verwirklicht werden kann (die Ebenen stehen in diesem Fall normal zueinander) vermittelt dieses Fehlermaß eine untere Grenze und die Möglichkeit einer Abschätzung. Die Lage des Hochzieles zu den Basispunkten kann durch ein Gewicht berücksichtigt werden, das nach [6] durch  $p = \sin^2(\alpha + \beta) / (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)$  gegeben wird. Dabei bezeichnen  $\alpha, \beta$  die Winkel, welche die Richtungen nach dem Hochziel mit der zu bestimmenden Verbindungslinie einschließen. Bemerkenswert ist, daß für den Fall symmetrischer Genauigkeiten der gemessenen Richtungen ( $m_\delta = \cos \delta m_\alpha$ ) dies auch für die abgeleitete Richtung gilt. Es kann somit erwartet werden, daß auch unter den bei praktischen Messungen vorliegenden Beschränkungen aus  $n$  Hochzielen eine wesentlich höhere etwa proportional  $\sqrt{n}$  abnehmende Richtungsgenauigkeit erhalten wird, als beim Anschluß einer einzelnen Satellitenrichtung.

Die versuchsweise Bestimmung von Azimuten im europäischen Netz scheint diese Aussage zu bestätigen. In [7] wird über die Bestimmung des Azimutes München-Braunschweig mit BC4 Kammern aus 4 Aufnahmepaaren berichtet, welche photogrammetrisch reduziert wurden. Das Azimut konnte aus dem Schnitt von vier Ebenen mit einer Genauigkeit von  $\pm 0''2$  berechnet werden, die Richtungsfehler nach einzelnen Satellitenpunkten lagen bei  $\pm 1''0$ . Das Azimut Potsdam-Bukarest wurde aus Satellitenaufnahmen mit behelfsmäßigen Kammern geringer Genauigkeit bei astronomischer Reduktion aus ebenfalls vier Ebenen mit der Genauigkeit von  $\pm 1''6$  ermittelt (s. [8]).

Die Entfernung zwischen zwei Punkten läßt sich gleichzeitig mit der Richtung ermitteln, wenn gleichzeitig mit der photographischen Aufnahme des Hochzieles wenigstens eine der Entfernungen zum Hochziel gemessen wird.

Jedes Tripel von Meßwerten (2 Richtungen, 1 Entfernung) bestimmt eine Raumgerade als Ort für den zweiten Bodenpunkt, n Tripel führen zu einem überbestimmten Problem, aus dem Richtung und Betrag des Verbindungsvektors der beiden Beobachtungsstationen berechnet werden können. Werden beide Entfernungen zum Hochziel gleichzeitig mit den Richtungen bestimmt, so lassen sich diese Daten aus jedem Quadrupel von Meßwerten (2 Richtungen, 2 Entfernungen) nach einem Hochziel ermitteln. Die Messungen nach Hochzielen ergeben wieder ein überbestimmtes System zur Berechnung des Verbindungsvektors.

Die Theorie und die Fehlerrechnung für diese Verfahren wird in [6] mitgeteilt. Eine Abschätzung der Fehler führt zu dem folgenden Ergebnis: Bei einer angenommenen Beobachtungsgenauigkeit von  $\pm 0''8$  für Richtungskoordinaten und  $\pm 1 \text{ mm/km}$  für Strecken können aus 5 Meßgruppen mit je 2 Richtungen und 2 Entfernungen Fehler von  $\pm 1,3 \text{ mm/km}$  für die Entfernung und  $\pm 0''3$  für die Richtungskoordinaten des Verbindungsvektors erwartet werden. Liegen nur Entfernungen von einer Station vor, so steigt der Entfernungsfehler auf  $\pm 5 \text{ mm/km}$ , der Richtungsfehler nimmt nur geringfügig zu und beträgt etwa  $\pm 0''4$ .

Für die nunmehr erreichbaren Meßfehler von  $\pm 0''3$  in den Richtungskoordinaten nach Hochzielen vermindern sich diese Fehler auf etwa 30 v.H.

Die Seiten eines Netzes können auch aus 4 Entfernungen abgeleitet werden, welche gleichzeitig von 4 Punkten eines aus orientierten Richtungen gebildeten Netzes nach ein und demselben Hochziel gemessen werden (s. [6] und [9]). Auch aus terrestrischen räumlichen Netzen oder Polygonen in Verbindung mit astronomischen Messungen folgt die Raumentfernung zwischen Netzpunkten. In beiden Fällen kann eine Genauigkeit von etwa  $\pm 1 \text{ mm/km}$  erreicht werden. Auf weitere Möglichkeiten auch mit Dopplermessungen wird in [10] hingewiesen.

Bei allen Methoden besteht die Erwartung durch oftmalige Wiederholung eine Steigerung der Genauigkeit etwa im Verhältnis  $\sqrt{n}$  zu erhalten. Doch bestehen Schranken zufolge physikalischer Gegebenheit (Refraktion, Variationen der Gestirnskoordinaten usw.), welche nicht überschritten werden können. Es ist aber sicher zulässig, für einzelne Seiten eines Stützungsnetzes eine Genauigkeit von  $\pm 0''1$  in den Richtungskoordinaten und von  $\pm 1 \text{ mm/km}$  für die Entfernung zu erwarten. Dabei ist vorausgesetzt, daß präzise und gleichwertige Kammern und Zeitmeßeinrichtungen und einheitliche und fehlertheoretisch einwandfreie Reduktionsverfahren Anwendung finden.

Dem Verfasser erscheint es zweckmäßig, die Kammern BC4 der Fa. Wild, BMK46 der Fa. Zeiß und SBG 420/500/760 der Fa. Jena-Optik vorzuschlagen, falls Ziele in größeren Entfernungen von über 400 km photographiert werden sollen.

Die Reduktion der Aufnahmen sollte nach dem photogrammetrischen Verfahren oder einem ergänzten, fehlertheoretisch einwandfreien astronomischen Anschlußverfahren erfolgen. Für geringere Entfernungen bis 400 km sollten die in Finnland entwickelten Astrographen und Verfahren benutzt werden.

Eine weitere Voraussetzung für die Erreichung der angegebenen Genauigkeit sind geeignete Hochziele, welche in einer fehlertheoretisch günstigen Position sichtbar werden. Für Entfernungen über 400 km sind dies Satelliten in etwa gleicher Höhe, bis 200 km aber Leuchtsätze, welche von Raketen oder Sonden in Höhen bis etwa 50 km getragen werden.

### 3) Vorschlag für europäische Satellitennetze

In Fig. 1 wird ein Vorschlag für ein europäisches Satellitennetz 1. Ordnung vorgelegt. Dieses enthält 3 Stationen des Weltnetzes und 9 Stationen, auf

welchem im Rahmen des Satellitenprogrammes der Westeuropäischen Subkommission für künstliche Satelliten bereits Beobachtungen ausgeführt werden. Weitere im Umkreis von etwa 200 km liegende Stationen sollen als Exzenter zu den ausgewählten Hauptstationen gelten. Ihre Zentrierelemente (Raumrichtung und Raumentfernung zur Hauptstation) müssen durch gesonderte terrestrische Messungen oder durch andere Verfahren mit Hochzielen (Stellartriangulation) bestimmt werden. Für die Berechnung werden die Messungen entweder auf die Hauptstation zentriert oder die Zentrierelemente durch Zwangsbedingungen angehalten.

Die durchschnittliche Entfernung der Netzseiten liegt bei 1300 km. Als Ziel wird daher ein Ballonsatellit benötigt, welcher in der Höhe von etwa 1300 km in einer Inklination  $80^\circ$  oder in einer Polarkreisbahn kreist und welcher Laser-Licht reflektieren kann.

Jede Netzseite soll aus Messungen nach mindestens 5 Satellitendurchgängen, also aus 4 Paaren von photographischen Aufnahmen und allenfalls zugeordneten Entfernungsmessungen bestimmt werden. Die Messung soll mit einheitlichen oder gleichwertigen präzisen Einrichtungen (Kammern, Laser und Uhren) erfolgen. Für die Reduktion ist ein einheitliches und fehlertheoretisch einwandfreies System zu benutzen, so daß für alle Satellitenpunkte gleichwertige Richtungskoordinaten und Entfernungen mit ihrer Fehlermatrix vorliegen.

Aus diesen Daten können entweder die Elemente (Richtungskoordinaten und Entfernungen) des terrestrischen Netzes abgeleitet werden und die Netzberechnung mit diesen korrelierten Beobachtungen erfolgen. Oder es wird ein Raumnetz unter Einbeziehung der Satellitenpunkte gebildet und dieses aus den beobachteten Daten berechnet.

Aus Versuchsrechnungen (s. [10]) und praktischen Erfahrungen ist bekannt, daß in Satellitennetzen Höhenfehler größer sind als die in horizontalen Ebenen liegenden Anteile und zusätzliche Entfernungsmessungen vor allem die

Höhenfehler beeinflussen. Die Ursache liegt in der Tatsache, daß sich wegen der kugelförmigen Gestalt der Erde Maßstabsfehler vor allem auf den Radius, also in Richtung der Höhe auswirken. Da terrestrisch ermittelte Höhen oft genauer sind als Lagekoordinaten und auch genauer als die aus Satellitennmessungen folgenden Werte, ist es naheliegend, etwa aus der REUN-Ausgleichung, bekannte Höhenunterschiede durch Zwangsbedingungen in die Ausgleichung des Satellitennetzes einzuführen. Es kann erwartet werden, daß dadurch auch eine Erhöhung der Lagegenauigkeit erreicht wird.

Aus den Elementen des ausgeglichenen Netzes oder aus gesondert ermittelten Seiten können Azimute und Längen von Diagonalen des europäischen Netzes abgeleitet werden. Damit wird eine Kontrolle der Orientierung und des Maßstabes des europäischen Netzes und des Ellipsoides möglich.

Zur Erfassung der Fehlerstrukturen kleinerer Netzteile (Landesnetze) soll im Anschluß an das Satellitennetz 1. Ordnung ein Verdichtungsnetz 2. Ordnung mit Hilfe von Hochzielen gemessen werden. Ein Entwurf hiefür enthält Fig. 2. Die durchschnittliche Länge der Netzseiten beträgt etwa 600 km, als Ziel wird daher ein Ballonsatellit in etwa 600 km Höhe benötigt. Auch dieser soll Laserlicht reflektieren.

Zu den Stationen des Netzes sollen auch die im Umkreis von 100 km liegenden Observatorien als Nebenstationen (mit angehaltenen Zentrierelementen) gezählt werden.

Für die Beobachtung können die im Netz 1. Ordnung benutzten Einrichtungen Verwendung finden. Die Reduktion und Berechnung kann nach den gleichen Verfahren wie im Netz 1. Ordnung erfolgen.

Schließlich soll in dieses Netz ein Netz 3. Ordnung mit Seitenlängen von etwa 200 km eingepaßt werden, welches nach dem in Finnland entwickelten Verfahren beobachtet wird. Hiefür werden Sonden als Träger von Leuchtsätzen und Astrographen und Laser für die Beobachtung benötigt.

#### 4) Zusammenfassung

Die mit Hilfe von Satelliten abgeleiteten Richtungen und Entfernungen, sowie daraus gebildeten Netze können die klassische europäische Triangulation stützen und zur Erfassung ihrer Fehlerstruktur beitragen. Umgekehrt kann das hervorragend bestimmte europäische Triangulierungsnetz auch benutzt werden, um zur Entwicklung von Verfahren und Geräten, in der ersten Phase der Entwicklung beizutragen, welche für die Bildung von Satellitennetzen benutzt werden sollen. Ein vorliegendes europäisches Satellitennetz würde in Verbindung mit den dicht liegenden festen Observatorien und den Daten des klassischen Netzes auch ein ideales Testfeld für die Erprobung neuer Theorien, Verfahren und Geräte darstellen. Schon während der Messung des Netzes muß daher empfohlen werden, neue Verfahren und Instrumente, insbesonderes Entfernungsmeßgeräte in diesem Netz an den gleichen Seiten und Netzteilen zu erproben und damit immer gleiche Elemente zu bestimmen. Nur dadurch können die absoluten Werte der Meßdaten überprüft, bestehende und neue Verfahren und Geräte verfeinert und verbessert und schließlich jene Steigerung der Genauigkeit erreicht werden, welche als Grundlage für weitere geophysikalische Forschungen benötigt wird.

## Europäisches Satellitennetz 10

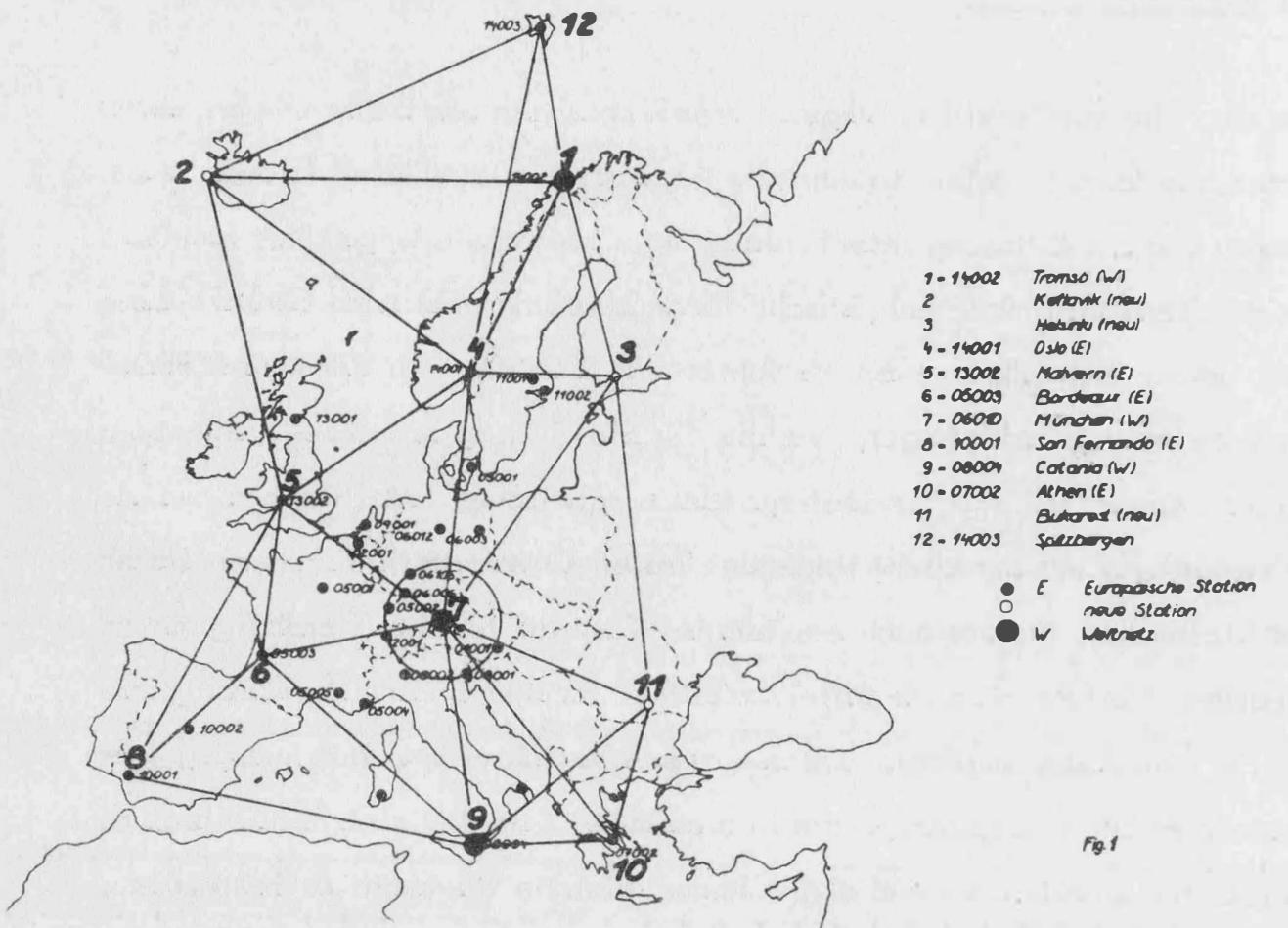


Fig. 1

## Europäisches Satellitennetz 2.0.

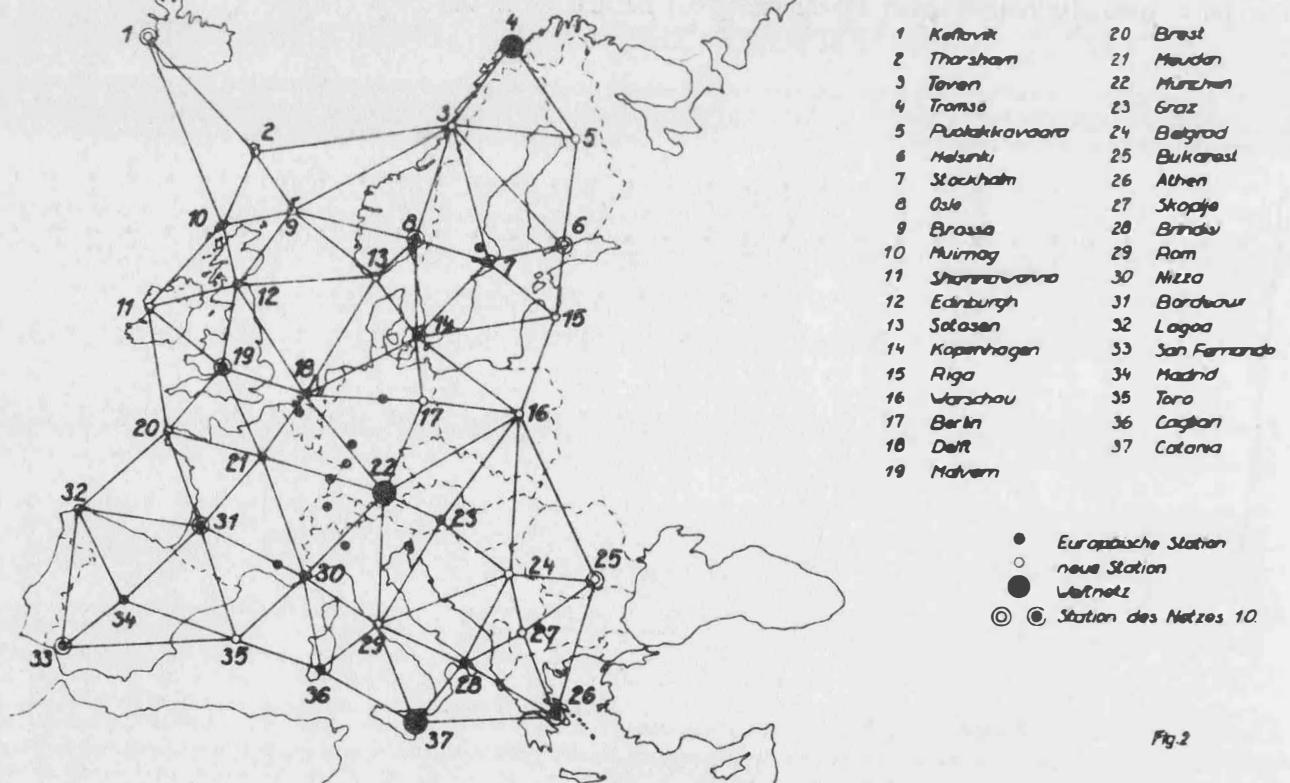


Fig. 2

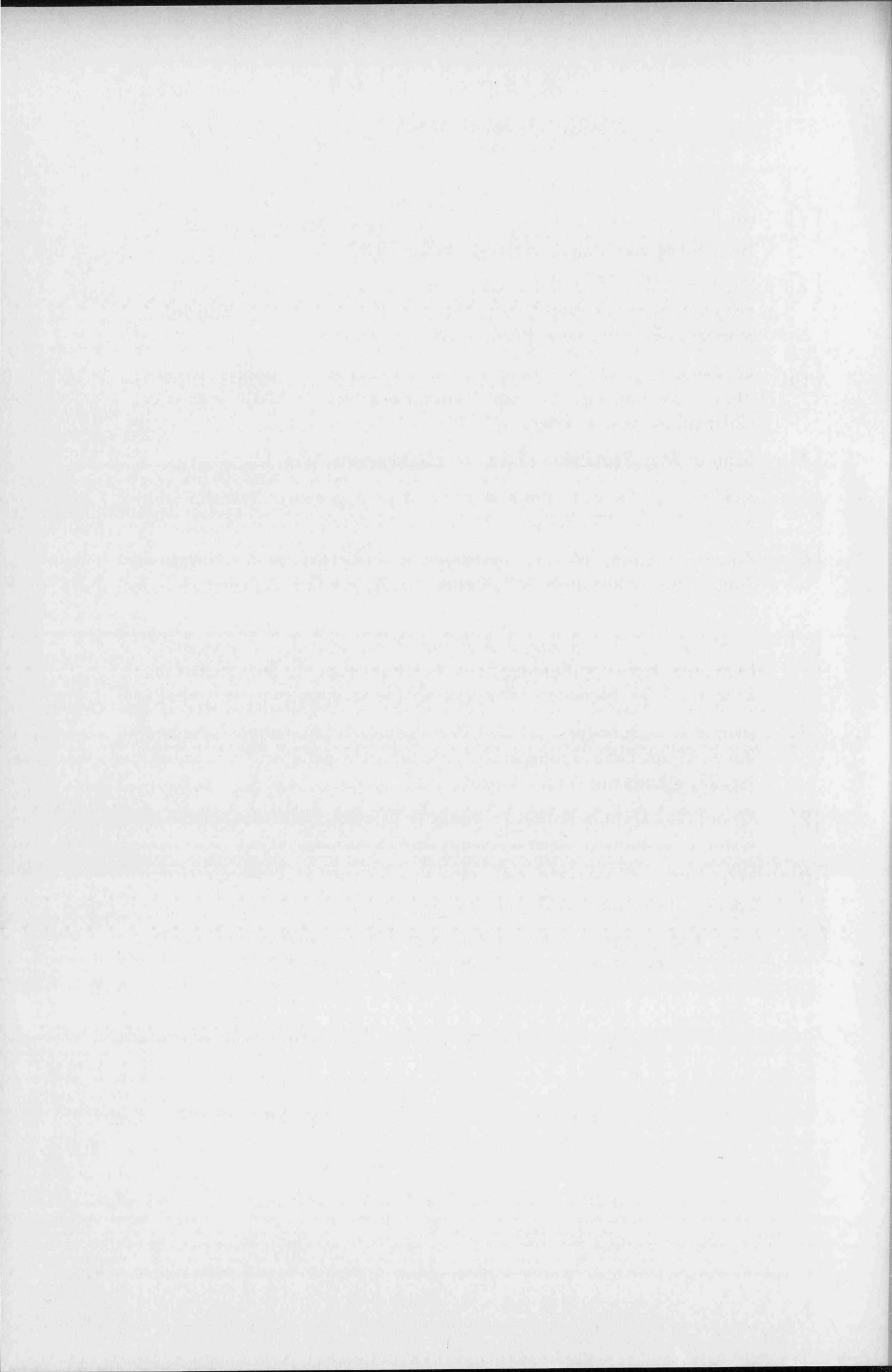
## LITERATURVERZEICHNIS

---



---

- [1] Witte B., Teleskopmessungen für geodätische Belange, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 4, 1970, S 150
- [2] Phillips I.O., The U.S. Coast and Geodetic Survey Satellite Program.: Reseau Geod. Européen par observation de Satellites, Sympos. de Paris, Dez. 1964, IGN, Paris 1964
- [3] Lambeck K., On the reduction and accuracy of precise Baker-Nunn observations. Cos par Transactions Nr.7 (1970) Proc. of a Colloquium held in Prague, 1968
- [4] Schürer M., Reduction of Schmit photographs, wie 3
- [5] Kakkuri J., Errors in the Reduction of photographic Plates for the Stellar Triang. The Photogr. Journal of Finland, Vol.3, Nr.2, 1969
- [6] Rinner, Killian, Meißl, Beiträge zur Theorie d.geod. Netze im Raum, DGK München 1969, Reihe A, Höhere Geod., Heft Nr. 61 (S 41 - 48)
- [7] Kaniuth K., Bestimmung d.Azimutes Braunschweig (Wesendorf) - München (Hohenpeißenberg) aus Simultanbeob. d. Sat. Echo I u. Echo II, DGK München 1969, Astron. Geod. Arbeiten, Heft Nr. 26
- [8] Arnold K.u.Schoeps D., Die Bestimmung d. Azimutes Potsdam - Bukarest aus Beob.d.Sat.Echo I, Veröff.d.Geod.Inst. in Potsdam, Nr.29, Akademie-Verl.-Berlin, 1965
- [9] Rinner K., Determination f. Scale in Spatial Direction Networks Österr.Zeitschrift f. Verm.Wesen, Sonderheft 25, Wien
- [10] Rinner K., Systematic Investigations of geodetic Networks in Space, European Res.Office, Nr.91 - 591, EUC-4006
- [11] Kneißl M., Satellitentriangulation in Europa im Anschluß an das Satelliten-Weltnetz d.US-Coast and Geod.Survey, wie 2



## Die Landesvermessung im Rückblick, Einblick und im Ausblick.

Hans Schmid, Wien

Es ist paradoxer Weise ein glücklicher Umstand, daß die durch verschiedene Umstände bedingte Verzögerung in der Herausgabe der Veröffentlichung der "Festschrift Ledersteger" nunmehr mit meiner Berufung an das Institut für Landes- und Katastervermessung zusammenfällt. Es sei mir daher gestattet, als Thema die Landesvermessung in Vergangenheit, Gegenwart und ihre Aufgaben in der Zukunft vorzustellen.

Einer klassisch gewordenen Einteilung zufolge werden die Aufgaben der Ausmessung unseres Planeten drei Disziplinen zugewiesen. Die Erdmessung (Geodäsie) und Geophysik haben zur Aufgabe, die geodätischen und geophysikalischen Parameter unserer Erde zu bestimmen. Die Landesvermessung hat die Abmessung und Darstellung der Länder und Kontinente zur Aufgabe, wobei als Ergebnis die Kartenwerke aller Maßstäbe resultieren. Auch die geographischen Karten basieren auf den Ergebnissen dieser Vermessungssparte. Schließlich entwickelte sich in den letzten Jahrzehnten eine dritte Vermessungsdisziplin sehr rasch, welche unter dem Sammelbegriff "Sondergebiete" in der Fachsprache Eingang gefunden hat in der die Ingenieurgeodäsie eine dominierende Rolle spielt. Auch die Photogrammetrie hat ursprünglich hierher gehört. Heute muß man dieses Spezialgebiet der Landesvermessung zuordnen, da die topographischen Karten und auch die Katasterpläne vornehmlich mit Hilfe photogrammetrischer Methoden hergestellt werden.

Diese Dreiteilung findet sich in dem "übergeordneten Vermessungssystem" noch einmal, nämlich in der Erforschung des Kosmos. Die

Astrophysik soll uns Erkenntnisse über andere Galaxien bringen, die Astronomie hat u.a. unsere Galaxie als klassisches Arbeitsgebiet erhalten, während die Geodäsie hier den kleinsten Raum, nämlich unsere Erde, zugewiesen bekam.

Während man früher immer dachte, daß das Planetensystem seine Existenz einer Art von Geburt aus der Sonne als Mutter verdanke, hat man diese etwas primitive Vorstellung aufgeben müssen, seit man weiß, daß die Sonne einerseits und – wenigstens – die erdähnlichen inneren Planeten Merkur, Venus, Erde und Mars andererseits chemisch völlig verschieden aufgebaut sind. Während die erdähnlichen Planeten vornehmlich aus schweren Elementen bestehen, sind die Bausteine der Sonne 99% Wasserstoff und Helium. Es müssen daher offenbar bestimmte Vorgänge die schweren Elemente angereichert und zu Planeten verdichtet haben. Der deutsche Physiker Professor Freiherr von Weizsäcker hat im Jahre 1938 seine Theorie auf Grund dieser Überlegungen über die Entstehung des Planetensystems entworfen. Seine Theorie ist heute allgemein anerkannt und in den letzten zweieinhalb Jahrzehnten wurde sie von einer beachtlichen Anzahl von Physikern und Astronomen verfeinert und ergänzt. Nicht zuletzt ergab die chemisch-physikalische Untersuchung des Mondgestein eine weitere Bestätigung dieser Weizsäckerschen Theorie. So wie mit größtem Eifer heute die Erforschung des Kosmos mit seinen Millionen, ja Milliarden Galaxien betrieben wird, so war es seit Anbeginn der vernunftbegabten Menschheit der Traum, ihren Lebensraum, unseren Planeten Erde und seine Umgebung, kennenzulernen. Und da das Kennenlernen eines Körpers, eines Raumes mit der Bestimmung der Dimensionen engstens verknüpft ist, lassen sich Vermessungsergebnisse in Form von Einteilungen und Abbildungen der Erdoberfläche bzw. Teilen von ihr durch

die gesamte Kulturgeschichte der Menschheit verfolgen. Es würde den Rahmen dieses Aufsatzes bei weitem sprengen, wollte man nun eine lückenlose Darstellung der Entwicklung der Landesvermessung versuchen. Es sollen daher nur einzelne besondere geschichtliche Marksteine angeführt werden.

Eine reinliche Trennung zwischen Erdmessung und Landesvermessung ist in den ersten Überlieferungen nicht durchführbar.

Die ältesten uns überlieferten Vermessungsergebnisse stammen aus dem babylonischen Raum. Eine Tonplättchenkarte des nördlichen Mesopotamien aus 3800 v.Chr. und ein babylonischer Bebauungsplan von 2050 v.Chr., den eine Diorit - Statue des Königs und Ingenieurs Gudea von Langasch als Platte auf den Knien trägt, scheinen die ältesten Zeugen vermessungstechnischer Arbeiten zu sein. Fast aus der gleichen Zeit stammen die ältesten Überlieferungen der ägyptischen Landvermessung. Es ist jedoch durchaus möglich, ja fast sicher, daß die ägyptischen Vermessungen um ein oder zwei Jahrtausende älter sind. Es gab wegen der jährlichen Nilüberschwemmungen im alten Reich bereits einen Liegenschaftskataster, bei dem die Grenzen dauerhaft stabilisiert wurden. Die Vermessung diente auch der Festsetzung der jährlichen Grundsteuer. Wir können hier von der ersten Landesvermessung sprechen. 1060 v. Chr. Kaiser Kang - Wang erließ 1060 v.Chr. den Befehl, China zu vermessen. Angaben darüber finden wir im Buche Tschio-ly.

Da die babylonischen Astronomen zum Zwecke der

Weissagung Mondfinsternisse genau beobachteten und registrierten, mußten sie über die Kugelgestalt der Erde bereits Bescheid wissen. Insbesonders die Seefahrer konnten aus ihren Beobachtungen vom Auftauchen von Schiffen und Küsten die astronomischen Beobachtungen bereits 400 v. Chr. stätigen. Erstmals hat Platon 400 v. Chr. die Kugelgestalt der Erde gelehrt. Aristoteles hat diese Lehre übernommen und sie bewiesen. Aristarcho von Samos hat 270 v. Chr. erstmals ein heliozentrisches Weltsystem entworfen, welches allerdings besonders durch die Stoiker verworfen und dessen Begründer der Gottlosigkeit geziehen wurde. Ein Vorgang, der sich in der Geschichte noch mehrmals wiederholen sollte.

390 v. Chr. Nachdem bereits Archytas v. Tarent 390 v. Chr. das Verfahren einer "Gradmessung" angegeben hat, wurde 550 Jahre danach das Wissen von der Kugelgestalt der Erde ein fester Bestandteil des Weltbildes. In der "Syntaxis", wie man jene große Zusammenstellung astronomischen Wissens aus dem zweiten nachchristlichen Jahrhundert nennt, liefert Ptolemäus von Alexandria auch jene Beweise, die noch heute die Kugelgestalt der Erde sinnfällig werden lassen. Die erste 240 v. Chr. mit Sicherheit überlieferte Erdmessung stammt von Eratosthenes, Bibliothekar in Alexandria. Wir wissen, daß sein Ergebnis der Bestimmung der Meridianlänge nur um 3% von den heutigen Werten abweicht. Man versuchte in der Folge die Ergebnisse des Eratos-

thenes nicht zu verbessern und es sollte über ein Jahrtausend vergehen, ehe die Araber eine weitere "Gradmessung" durchführten. Die Gelehrten des römischen Weltreiches haben die Erkenntnisse der griechischen und hellenistischen Geographen, Astronomen und Mathematiker nicht weiter vervollständigt. Den Römern ging es weniger um das Bild der gesamten Erde, als um die Darstellung bestimmter Gebiete und Provinzen. Von einem Fortschritt in Mathematik, Astronomie und Geodäsie kann kaum gesprochen werden. Eine Art Katastervermessung wurde von den "Agrimensoren" durchgeführt, wobei als Vermessungsgerät die "Groma" diente, mit der man rechte Winkel über ein Holzkreuz mit herabhängenden Senkeln abstecken konnte. Als Ergebnis folgte die Centuriatio und der Katalster. Unter Centuriatio ist das römische System der Landaufteilung in quadratische Flächen zu verstehen. In vielen Teilen Italiens und anderen früher römischen Gebieten ist die alte Centuriatio noch heute zu erkennen. (Nordafrika, Provinz Emilia). Die römische Katastervermessung basiert auf einem rechtwinkeligen Bezugssystem, Cardo und Decumanus benannt. Die Ingenieur-Geodäsie war weiter entwickelt, da sie für den extensiven Straßen- und Wasserleitungsbau die Voraussetzungen schaffen mußte. Die Geräte waren einfach, neben der Groma gab es Nivellierinstrumente, die im Wesentlichen aus Visiereinrichtungen mit herabhängenden Loten bestanden. In derselben Zeit, nämlich 140 n.Chr. entwirft Claudius Ptolemäos von Alexandria seine Erdkarte mit dem Gradnetz der Meri-

150 n.Chr.

- diane und Parallele. Er mißt bereits Höhenwinkel und stattet seine Karten mit Höhenangaben aus. Auch Österreich ist, wenn auch mangelhaft, auf dieser Erdkarte
- 175 n. Chr.** dargestellt. Das Jahr 175 n.Chr. ist für alle technischen Wissenschaften eine Sternstunde. Uns wird bekannt, daß die Inder das dezimale Zahlensystem kennen. In die
- 370 n.Chr.** Zeit um 370 n.Chr. fällt die Entstehung der sogenannten Peutingerschen Tafel, einer Wegekarte aus dem 4. Jh. n.Chr. Sie stellt die gesamte Kenntnis von der Erde im Altertum dar. Die Darstellung erfolgte ohne Projektion und wurde auf einem schmalen Streifen vorgenommen, wodurch die Nord - Süd - Dimensionen arg zusammengedrückt wurden.
- 450 n. Chr.** Die weitere Kartenherstellung steht im Zeichen der Ptolemäischen Arbeiten, wie etwa die Karten des Agathodämon zeigen.
- Wir machen einen Sprung in die Zeit der arabischen Vorherrschaft. So läßt Al - Mamun , Kalif von
- 827 n. Chr.** Bagdad, Sohn des Hárun - Al - Raschid um 827 n.Chr. eine Gradmessung in Mesopotamien durchführen. Von einem Punkt in der Wüste Singar wanderte ein Geometer so weit nach Norden, ein zweiter so weit nach Süden, bis der Höhenwinkel des Polarsterns jeweils um  $1^{\circ}$  größer bzw. kleiner war als am Ausgangsort. Aus dieser Messung resultierte ein Erdumfang von 41 436 km. Das ergibt einen Fehler von 3,6 % gegen den Wert von rund 40 010 km.

Das dunkle Mittelalter macht natürlich auch vor den

- Ergebnissen der Vermessungskunst nicht hält und lässt sie in Vergessenheit versinken. Die Lehren des Ptolemäus in der Kartenherstellung weichen den "Mönchskarten", rein schematischen Darstellungen des Erdkreises. Die Erde ist wieder eine Scheibe, das Wissen des Altertums wird als heidnisch verdammt. Eine dieser Karten ist die "Ebstorfer Weltkarte". Der Mittelpunkt ist Jerusalem, sie ist nach Osten orientiert und verarbeitet biblische, antike und volkstümliche Überlieferung.
- 1365 n.Chr. Mit der Gründung der Wiener Universität nahm Mathematik, Astronomie und Trigonometrie in unserem Lebensraum einen steilen Entwicklungsaufstieg. Der Name
- 1408-1435 Johannes von Gmunden und sein Kreis, heute als "Wien - Klosterneuburger Schule" bezeichnet, sind damit engstens verbunden. In dieser Zeit fallen die Anfänge einer kartographischen Tätigkeit in Österreich. Ich möchte aber über die Entwicklung der Landesvermessung und Kartographie in Österreich hier nicht im Detail berichten, da darüber eine Fülle von Arbeiten existieren. Besonders darf ich auf die Arbeiten meines Lehrers emer.o.Prof.Dr. J. Rohrer hinweisen. Die Veröffentlichungen anlässlich des 150. Geburtstages des Österr. Grundkatasters, von denen die Arbeit des ehem. Präsidenten des Bundesamtes f.E.u.V.W. Dipl.Ing.Karl L e g o hervorragt, geben eingehend Aufschluß über die Katastervermessung in Österreich. Einige wichtige Daten sollen nur zur geschichtlichen Orientierung angeführt werden.

- Im 16. und 17. Jahrhundert beginnen in den meisten europäischen Ländern die großen Landesvermessungen.
- 1533 n.Chr. Die Anfänge der Triangulation gehen auf R. Gemma Frisius um 1533 zurück. Kopernikus begründet zur selben Zeit die moderne Astronomie und das endgültige heliozentrische Weltbild. Gerhard Mercator (1512-1594) schafft die berühmt gewordene, nach ihm benannte winkeltreue Zylinderprojektion, die bis in unsere Tage für Navigationszwecke verwendet wird. 1554 beginnt man in Bayern, 1600 in Sachsen und 1619 in Württemberg mit der Landesvermessung. In den österreichischen Landen entstanden zum Teil auf Grund von Vermessungen, zum anderen auf Grund älterer vorhandener Aufzeichnungen neue Kartenwerke, die durchwegs in einheitlichen Maßstäben ausgeführt sind. Als Beispiele seien angeführt: die Karte des Ingolstädter Universitätsprofessors Apian von Oberösterreich und Teilen von Salzburg (Bayrische Land-Tafeln 1:144 000 1568), weiters die Karte der "Fürstlichen Grafschaft Tirol 1:160 000 von Burgklehner,
- 1629 n.Chr. Vizekanzler von Tirol, die Karte von Kärnten 1:320 000
- 1612 n.Chr. von Israel Holzwurm und schließlich schaffte Vischer (1628-1696), der einen wesentlichen Fortschritt in der Kartographie bedeutete, Kartenwerke von Oberösterreich 1:150 000, Niederösterreich ebenfalls 1:150 000, Steiermark 1:160 000, Ungarn und Siebenbürgen und Mähren 1:185 000. Nach Beendigung des siebenjährigen Krieges erteilte Kaiserin Maria

- Theresa dem damaligen Chef des Generalstabes Oberst von Fabris den Auftrag zur Ausführung einer Landesaufnahme des ganzen Reiches, worunter die Kronländer zu verstehen sind. (I. Landesaufnahme, auch bekannt unter Josephinischer Aufnahme 1:28 800). Österreich besaß durch dieses Werk eine großmaßstäbliche Karte, wie es in jener Zeit kein Staat aufweisen konnte.
- 1719 1719 organisierte Jakob Marinoni die Arbeiten zum "Mailänder Kataster". Ein Jahr später wird der Ferro-Nullmeridian als der genau 20. Längengrad westlich der Pariser Sternwarte definiert. Im gleichen Jahr beginnt die erste russische Landesvermessung unter
- 1737-1747 Ivan Kirillov. 1737 beginnen die ein Jahrzehnt währenden französischen Gradmessungen in Lappland und Peru. Die "Toise du Perou" soll später zur ersten Definition des neuen Maßes des "Meters" herangezogen werden (1799). Unter Liesgang (1719-1799) werden die Arbeiten zur Schaffung eines modernen Triangulierungsnetzes mit Basismessungen begonnen. Er kann mit Recht als Begründer einer modernen Landesvermessung bezeichnet werden. Im folgenden 19. Jahrh. werden sowohl die mathematischen wie auch die geodätischen Grundlagen für unser gesamtes modernes Vermessungswesen geschaffen. Auch auf dem Gebiet der Instrumententechnik werden die entscheidenden Erfindungen gemacht. Ich möchte daher von diesem geodätisch "dichten" Jahrhundert nur wesentliche Stationen aufzeigen. 1807 beginnt in Österreich die II. Landesauf-
- 1807

- 1809 nahme. Soldner verwendet sein Koordinatensystem der rechtwinkelig - sphärischen Koordinaten bei der Bayrischen Landesvermessung. 1821 beginnt in Deutschland und in Österreich die Meßtischaufnahme für den Kataster bzw. Stabilen Kataster. Struve führt die russisch-skandinavische Breitengradmessung durch.
- 1825 C.F. Gauß, einer der größten Geodäten aller Zeiten, schafft den konformen querachsigen Zylinderentwurf und ersinnt die "Methode der kleinsten Quadrate", um nur zwei Glanzlichter aus der unübersehbaren Fülle seines wissenschaftlichen Schaffens zu nennen. Daguerre erfindet die Photographie und damit die Grundlage für die Photogrammetrie, der einzigen heute für die Landesvermessung wirtschaftlich anzuwendenden Aufnahmehode.
- 1837-41 F.W. Bessel ermittelt die Dimensionen seines Referenzellipsoides.
- 1868 1868 beginnt die III. österr. Landesaufnahme im Maßstab 1:25 000, womit auch das Metermaß eingeführt wurde (1872). Vier Jahre später geht Deutschland auf dieses Maß über. Nachdem seit 1889 für die ganze österr.-ungarische Monarchie ein brauchbares Kartenwerk vorlag, begann man 1896 mit einer Präzisionsaufnahme (IV. Landesaufnahme) 1:25 000, bei der erstmalig photogrammetrische Methoden angewendet wurden.

Die Entwicklung in unserem Jahrhundert ist so stürmisch verlaufen, daß eine Würdigung in dieser Form kaum möglich ist. Halten wir fest, wo wir nun stehen, daraus ergibt sich zwangsläufig die Entwicklung für die Zukunft. Der Flächeninhalt des Festlandes unseres Pla-

neten beträgt rund 149 Millionen Quadratkilometer. Davon sind trotz aller Anstrengungen bisher nur 15 - 20% größer als 1:100 000 dargestellt. Großmaßstäbliche Kartenwerke etwa im Bereich der Katastermaßstäbe existieren nach groben Schätzungen für 6 Millionen qkm, d.s. für 4% des Festlandes. Der Bedarf an Katasterunterlagen für Verwaltung und Planung wird ungeheuer, wenn im Jahre 2000 etwa 6 Milliarden Menschen unseren Planeten bevölkern werden.

Mit Hilfe der Hochziel- und Satellitentriangulation werden gegenwärtig weltweite Triangulierungsnetze geschaffen. Die Landesvermessung der Zukunft hat die Methoden in ihr Programm aufzunehmen, wobei die Meßgenauigkeit überlanger Distanzen zu erfassen ist. Die Physik der Atmosphäre und die Form des Geoides entlang der zu messenden Distanzen müssen bekannt sein. Die Detailtriangulation wird mehr und mehr den automatisierten Methoden wie Photogrammetrie und Radar-Grammetrie zugewiesen werden müssen. In den großräumigen Gebieten vieler Entwicklungsländer wird dies in der Praxis bereits durchgeführt. Die Detailaufnahme für die Landesaufnahme erfolgt bereits weltweit über den Informationsträger "Luftbild". Die Auswertung klassischer Prägung wird ergänzt durch das Orthophoto und in weiterer Folge durch die Radar - Aufnahmemethoden, die derzeit in Entwicklung stehen. Die Katasteraufnahmen modernen Stils münden zweifellos in eine automatisierte Digitalmethode, wobei auch hier Luftbild und Radargramm die Informationslieferanten sein werden. Selbstverständlich wird das Bedürfnis besonders nach den Katasterunterlagen eng korreliert mit dem Bevölkerungszuwachs, aber auch mit der Gesellschafts- und damit mit der Verwaltungsform sein. Um in relativ knappen Zeiträumen zeitsparend große Gebiete katalogmäßig erfassen zu können, wird es notwendig sein, nur unbedingt

notwendige Genauigkeitsschranken zu erarbeiten und festzulegen. Historische Überlieferung und romantische Genauigkeitsvorstellungen müssen der Vergangenheit überantwortet werden. Entsprechende Berechnungsmethoden und eine den modernen Bedürfnissen entsprechende Ausgleichsrechnung haben die mathematische Grundlage für die neuen Aufgaben der Landesvermessung und der Verfassung von technischen Katasterunterlagen zu liefern.

Mit diesen Feststellungen seien die Aufgaben des von mir übernommenen Institutes für "Landes- und Katastervermessung" grob umrissen.

Über einige Studien  
zur dynamischen Nutzung künstlicher Erdsatelliten  
(Anwendung der HAMMERSTEIN-Methode zur Bestimmung  
des Gravitationsfeldes der Erde)  
  
von R.SIGL, München

Abstract :

The paper is concerned with investigations on Dynamical Satellite-Geodesy, carried out at the Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie of the Technical University Munich.- The determination of field parameters, formulated as boundary value problem and solved as integral equation using a method by HAMMERSTEIN, is discussed.

1. Vorbemerkung

Die Arbeitsgruppe "Dynamische Nutzung künstlicher Erdsatelliten" am Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie der Technischen Universität München hat, vom Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft bzw. im Rahmen des "Sonderforschungsbereiches 78 Satellitengeodäsie" von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell gefördert, seit 1963 Studien zu dynamischen Fragen der Satellitengeodäsie ausgeführt.- Im Hinblick auf die zahlreichen, zu diesem Thema vorliegenden internationalen Arbeiten (vgl. z.B.[12],[13]), den dabei erreichten Stand, die teilweise erkennbare Problematik und der

Kapazität eines Hochschulinstitutes entsprechend wurden folgende, als aussichtsreich erscheinenden Fragestellungen aufgegriffen:\*

- a) Neue Lösungswege für die Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen,
- b) Bestimmung geozentrischer Stationskoordinaten,
- c) Übertragung der zur Lösung dieser Aufgabe gewonnenen Lösungen auf andere Planeten und den Erdmond.

Für die Bewältigung dieser Aufgaben wurden verschiedene Teilprojekte in Angriff genommen: Zur Sicherstellung und Aufbereitung der nötigen Beobachtungen wurde eine Zusammenarbeit mit dem Nationalen Institut für Astronomie und Geophysik in Paris (Observatoire Meudon) vereinbart und darüber hinaus für die Bundesrepublik Deutschland der Aufbau einer bedingt mobilen Beobachtungsstation für Entfernung- und Richtungsmessung mittels Laser sowie Radialgeschwindigkeitsmessungen im optischen Bereich, eine Beteiligung dieser Station an internationalen Beobachtungsprogrammen (z.B. ISAGEX-Projekt) und die Schaffung einer Datenbank vorgeschlagen.- Da die Bewältigung grosser Datenmengen den Einsatz von Grossrechenanlagen erfordert, werden mathematische Methoden (numerische Integration, Quadratur, Statistik etc.) auf ihre Verwendbarkeit untersucht.- Theoretische Untersuchungen konzentrieren sich auf die Anwendung einer verallgemeinerten FOURIER-Analyse bei der Bestimmung der großeräumigen Struktur des Gravitationsfeldes der Erde und von geozentrischen Stationskoordinaten.- Besondere Aufmerksamkeit widmet die Gruppe auch der Theorie der Satellitenbahn, um geeignete Kriterien für die Auswahl von Satellitenbahnen zu gewinnen.- Für die Rechenarbeiten steht die Großrechenanlage IBM 360/91 des MAX-PLANCK Institutes für Plasmaphysik in Garching bei München zur Verfügung; eine Datenfernstation für den Betrieb an der Rechenanlage TR 440 des LEIBNIZ-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München wird derzeit vorbereitet.

---

\* Vgl. auch den vom Verfasser im Auftrag des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft erstellten "Fünfjahresplan Satellitengeodäsie 1970 - 74".

Über die bisherigen Ergebnisse der Arbeitsgruppe wurde 1967 und 1969 berichtet (vgl. [14], [15]).- Im folgenden soll das in letzter Zeit ausgearbeitete Verfahren zur

## 2. Bestimmung des Gravitationsfeldes nach der HAMMERSTEIN-Methode

in den Grundlagen skizziert werden.- In den wenigen Jahren seit dem Start des ersten künstlichen Erd-satelliten wurden von verschiedenen Autoren Verfahren zur Bestimmung der Parameter des Gravitationsfeldes aus beobachteten Satellitenbahnstörungen angegeben. Darüber hinaus wurde versucht, diese Parameter durch unabhängige Bestimmungen zu überprüfen. Als einzige Möglichkeit bot sich dafür bislang ein Vergleich mit den aus gravimetrischen Beobachtungen abgeleiteten Parametern an. Die ungenügende Zahl und Verteilung der Schwerewerte führt aber dazu, dass nur wenige dieser Parameter - überdies nur ungenau - bestimmt werden können. Es war daher geboten, nach neuen, unabhängigen Kontrollmöglichkeiten zu suchen.

1967 hat A. BJERHAMMAR (vgl.[1]) die Möglichkeit ange-deutet, ein Bewegungsintegral als Bestimmungsgleichung für Feldparameter zu benützen. Eine Überprüfung dieses Hinweises hat CH.REIGBER in seiner Dissertation vor-genommen (vgl.[3]). Dabei zeigte sich, dass das all-gemeine JACOBI-Integral prinzipiell dafür geeignet ist; Testrechnungen lassen diese Methode jedoch eher skeptisch beurteilen, weil sie sehr hohe Anforderun-gen an die Zahl und Verteilung der Beobachtungen stellt.- Als weit erfolgversprechender erweist sich eine von M.SCHNEIDER vorgeschlagene Methode zur Be-stimmung von Feldparametern, die aus einer allgemei-nen Lösung des Bahnbestimmungsproblems entwickelt und als verallgemeinerte FOURIER-Analyse aufgefasst wer-den kann (vgl.[6], [7], [8], [9], [10]).

### 2.1 Die Bahnbestimmungsmethode

Betrachtet sei der antriebsfreie Flug eines Satelli-tens. Mit den Bezeichnungen

- $\mathbf{R} = \mathbf{G} + \mathbf{g}$  = Kraftfeld,
  - $\mathbf{G}$  = Gravitationsfeld der Erde,
  - $\mathbf{g}$  = nicht-gravitationale Kräfte,
  - $m$  = Satellitenmasse,
- (1)

$r(t)$  = Ortsvektor bezüglich eines geo-zentrischen Inertialsystems zur Zeit  $t$ ,

(noch (1))

lautet die NEWTON'sche Bewegungsgleichung

$$m \ddot{r}(t) = R(t; r, \dot{r}) . \quad (2)$$

Die Auswahl einer bestimmten Bahn  $r(t)$  aus der Lösungsgesamtheit der Vektordifferentialgleichung (2) kann erfolgen

- a) durch Vorgabe von Anfangswerten  $r_0, \dot{r}_0$  zur Zeit  $t_0$  gemäss

$$r(t_0) = r_0, \dot{r}(t_0) = \dot{r}_0 , \quad (3)$$

- b) oder durch Vorgabe von Ortern  $r_A, r_B$  zu zwei endlich benachbarten Zeitpunkten  $t_A, t_B$  entsprechend

$$r(t_A) = r_A, r(t_B) = r_B . \quad (4)$$

Die Determinierung der Aufgabe gemäß (4) führt auf die Lösung einer Randwertaufgabe; zu suchen ist eine Lösung von (2), die den Randwertbedingungen (4) genügt.- Nach [2] lässt sich diese Randwertaufgabe als Integralgleichung der Form

$$r(t) = \bar{r}(t) - T^2 \int_0^1 K(t, t') \frac{R(t')}{m} dt' \quad (5)$$

mit  $\bar{r}(t) = r_A + t(r_B - r_A)$ , dem Integralgleichungskern

$$K(t, t') = \begin{cases} t & (1-t') \\ t' & (1-t) \end{cases} \text{ für } \frac{t}{t'} \leq t' \leq 1 ,$$

der Zeitnormierung

$$t_A = 0, T = t_B - t_A, t_B = 1 ,$$

und der neuen Variablen

$$t = \frac{t - t_A}{t_B - t_A} \quad \text{mit } t \in [0,1] .$$

Die Integralgleichung (5) kann nach der von HAMMER-STEIN angegebenen Methode gelöst werden, wenn die Lösung  $r(t)$  als Entwicklung nach den orthonormierten Eigenfunktionen des Integralgleichungskernes angesetzt wird:

$$r(t) = \bar{r}(t) + \sum_{v=1}^{\infty} c_v \sin v \pi t \quad (6)$$

Das System der Bestimmungsgleichungen für die Koeffizientenvektoren  $c_v$  folgt unmittelbar aus (5): Führt man für  $r(t)$  den Ansatz (6) und für den Kern  $K(t,t')$  die bilineare Reihe

$$K(t,t') = 2 \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin v \pi t \sin v \pi t'}{\pi^2 v^2} \quad (7)$$

ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich gleicher FOURIER-Terme

$$c_v = - \frac{2T^2}{\pi^2 v^2} \int_0^1 \sin v \pi t' \frac{R}{m} dt' \quad (8)$$

Ist  $R$  bekannt, so liefert (8) die Koeffizientenvektoren  $c_v$  und nach (6) ist die Bewegung im Zeitintervall  $[t_A, t_B]$  bekannt.

Ohne weiter auf die Frage der Bahnbestimmung einzugehen (vgl. [6], S.10-12), soll jetzt die

## 2.2 Anwendung auf die Bestimmung von Feldparametern

skizziert werden.- Ist die Bewegung  $r(t)$  im Zeitraum  $[t_A, t_B]$  bekannt, so liefert (6), wenn man bei einem endlichen Wert  $v = n$  abbricht, ein lineares Gleichungssystem

$$\sum_{v=1}^n c_v \sin v \pi t = r(t) - \bar{r}(t) \quad (9)$$

zur Bestimmung einer endlichen Zahl  $v = n$  von Koeffizientenvektoren und (8) ein endliches System von Bestimmungsgleichungen für die Parameter des wirksamen Kraftfeldes  $\mathbf{g}$ . - Benutzt man für die Darstellung von  $\mathbf{g}$  die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials

$$U = \frac{k^2}{r} M \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n^m(\cos \theta) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \right\} \quad (10)$$

mit

- $r, \theta, \lambda$  = räumliche Polarkoordinaten,
- $k^2$  = Gravitationskonstante,
- $M$  = Erdmasse,
- $R$  = Äquatorradius der Erde,
- $P_n^m(\theta)$  = Kugelfunktion vom Grade  $n$ , Ordnung  $m$ ,
- $C_{nm}, S_{nm}$  = Potentialkoeffizienten ,

so wird

$$\mathbf{g} = m \operatorname{grad} U + \mathbf{g}' . \quad (11)$$

(11) bzw. (10) in (8) eingeführt gibt

$$c_v = \frac{T^2}{v^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} u_{nm,v} + S_{nm} v_{nm,v} + \xi_v) \right]$$

mit

$$\begin{aligned} u_{nm,v} &= - \frac{2k^2 M R^n}{\pi^2} \int_0^1 \sin v\pi t' \operatorname{grad} \frac{\cos m\lambda P_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} dt' \\ v_{nm,v} &= - \frac{2k^2 M R^n}{\pi^2} \int_0^1 \sin v\pi t \operatorname{grad} \frac{\sin m\lambda P_n^m(\cos \theta)}{r^{n+1}} dt' \\ \xi_v &= - \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \sin v\pi t' g(t'; r(t'), \dot{r}(t')) dt' . \end{aligned} \quad (12)$$

(12) ist ein lineares System von Bestimmungsgleichungen für die Potentialkoeffizienten  $C_{nm}, S_{nm}$  des Gravitationsfeldes der Erde. - Das System ist lösbar, wenn die Bewegung  $r(t)$  im Zeitraum  $[t_A, t_B]$  bekannt ist,

also die Koeffizientenvektoren  $c_v$  vorliegen und  $\mathfrak{g}$  hinlänglich bekannt ist, weil dann die bestimmten Integrale  $\mathfrak{U}_{nm,v}$ ,  $\mathfrak{B}_{nm,v}$  und  $\mathfrak{S}_v$  berechnet werden können.

Ohne näher auf die numerischen Probleme einzugehen (vgl. z.B. [3]), sei kurz der Lösungsweg erwähnt:

- a) Bestimmung genäherter Örter  $r'(t)$  aus den Beobachtungen,
- b) Ableitung genäherter Koeffizientenvektoren  $c'_v$  aus den  $r'(t)$  und Bestimmung einer genäher-ten Ephemeride,
- c) Bestimmung der Verbesserungen  $dr_A$ ,  $dr_B$ ,  $dc_v$  aus den Abweichungen zwischen Beobachtung und genäherter Ephemeride,
- d) Berechnung der bestimmten Integrale  $\mathfrak{U}_{nm,v}$ ,  $\mathfrak{B}_{nm,v}$ ,  $\mathfrak{S}_v$ ,
- e) Auflösung des Gleichungssystems (12) nach  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ .

### 2.3 Beliebige Referenzbahn als Ausgangsnäherung

Im Rahmen umfangreicher Testrechnungen anhand simulierter Satellitenbeobachtungen hat das oben skizzierte Verfahren eine wesentliche methodische Verbesserung erfahren, die sich wie folgt charakterisieren lässt: Im Sinne der als Integralgleichung formulierten Randwertaufgabe kann die Bestimmung des Gravitationsfeldes als Analyse der Abweichungen  $r(t) - \bar{r}(t)$  der tatsächlichen Bahn  $r(t)$  von der durch  $\bar{r}(t)$  beschriebenen kräftefreien geradlinigen Trägheitsbewegung verstanden werden.- Von Bedeutung sind aber letztlich jene Bewegungsanteile, die von der Anisotropie des Gravitationsfeldes herrühren, also z.B. die Abweichungen von einer ungestörten KEPLER-Bahn. Die Randwertaufgabe für  $r(t)$  ist dann so zu formulieren, daß die Ausgangsnäherung  $\bar{r}(t)$ , die als Referenzbahn aufgefaßt werden kann, der KEPLER-Bahn entspricht.- Die Integralgleichung für den Fall, daß eine Kreisbahn als Ausgangsnäherung benutzt wird, wurde von V.A. BRUMBERG 1962 angegeben und von CH. REIGBER (vgl. [3]) untersucht.- Die Formulierung und Lösung der Randwertaufgabe für eine beliebige Referenzbahn  $r_n(t)$  hat M. SCHNEIDER in [10] besorgt.

Grundlage dieser Variante ist, daß für den Abweichungsvektor  $\theta(t) = r(t) - r_n(t)$  in einem Inertialsystem eine Bewegungsgleichung der Form

$$m \ddot{\theta} = R_{\text{eff}}(t; \theta, \dot{\theta}) \quad (13)$$

existiert, wobei sich das "wirksame" Kraftfeld  $R_{\text{eff}}$  gemäß

$$R_{\text{eff}} = R(t; r, \dot{r}) - R_n(t; r_n, \dot{r}_n) \quad (14)$$

ergibt, worin  $R_n(t; r_n, \dot{r}_n)$  das der Referenzbahn  $r_n(t)$  entsprechende Referenzkraftfeld bedeutet.- Die Randwertaufgabe für  $\theta(t)$  ist analog zu (5) formulierbar:

$$\theta(t) = \bar{\theta}(t) - \int_{t_A}^{t_B} K(t, t') \frac{R_{\text{eff}}(t; \theta(t'), \dot{\theta}(t'))}{m} dt'$$

mit

$$\bar{\theta} = \frac{t_B - t}{T} \theta_A + \frac{t - t_A}{T} \theta_B, \quad T = t_B - t_A,$$

$$K(t, t') = \begin{cases} \frac{(t-t_A)(t_B-t')}{T} & \text{für } t \leq t' \\ \frac{(t'-t_A)(t_B-t)}{T} & \text{für } t' \leq t \end{cases} \quad (15)$$

Entwickelt man  $\theta(t)$  wieder nach Eigenfunktionen des Kernes, so wird:

$$\theta(t) = \bar{\theta}(t) + \sum_{v=1}^{\infty} \dot{\theta}_v \sin(v\pi \frac{t-t_A}{T}) ; \quad (16)$$

benutzt man für den Kern  $K(t, t')$  wieder die Bilinear-darstellung

$$K(t, t') = 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin v\pi t \sin v\pi t'}{v^2 \pi^2}$$

und setzt (16) und (17) in (15) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich gleicher Eigenfunktionen ein System von Bestimmungsgleichungen für  $\theta_v$ :

$$\theta_v = - \frac{2}{v^2 \pi^2} \int_{t_A}^{t_B} \sin(v\pi \frac{t-t_A}{T}) \frac{R_{\text{eff}}(t'; \theta(t'), \dot{\theta}(t'))}{m} dt' \quad (18)$$

mit  $v = 1, 2, \dots, \infty$ .

Sind die Randabweichungen  $\theta_A, \theta_B$  und die Koeffizientenvektoren  $\theta_v$  aus Beobachtungen empirisch bestimmt, so ist nach (15)  $\theta(t)$  und somit auch die Bahn  $r(t) = r_n(t) + \theta(t)$  bekannt. (18) liefert wieder ein System von Bedingungsgleichungen für die Parameter des Gravitationsfeldes, wenn man

$$\begin{aligned} R_{\text{eff}} &= G + g - R_n \\ &= m \text{ grad } U(t; r) + g(t; r, \dot{r}) - R_n(t; r_n, \dot{r}_n) \end{aligned} \quad (19)$$

einführt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \mathfrak{U}_{nm,v} + S_{nm} \mathfrak{B}_{nm,v}) = v^2 \theta_v + \xi_v \quad (20)$$

wobei die bestimmten Integrale jetzt lauten

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{nm,v} &= -\frac{2k^2 M R^n}{\pi^2} \int_{t_A}^{t_B} \sin(v\pi \frac{t-t_A}{T}) \cdot \text{grad} \frac{\cos m\lambda P_n^m(\Theta)}{r^{n+1}} dt' \\ \mathfrak{B}_{nm,v} &= -\frac{2k^2 M R^n}{\pi^2} \int_{t_A}^{t_B} \sin(v\pi \frac{t-t_A}{T}) \cdot \text{grad} \frac{\sin m\lambda P_n^m(\Theta)}{r^{n+1}} dt' \\ \xi_v &= \frac{2}{m\pi^2} \int_{t_A}^{t_B} \sin(v\pi \frac{t-t_A}{T}) \left[ g(t'; r, \dot{r}) - R_n(t', r_n, \dot{r}_n) \right] dt' \end{aligned}$$

Der Lösungsweg entspricht dem in 2.2 angegebenen.

Die verschiedenen Möglichkeiten für die Auswahl der Referenzbahn werden in [10] S.16 f. diskutiert. Ohne näher auf Fragen der numerischen Behandlung einzugehen (vgl. [3] S.108 f.) soll die Methode noch charakterisiert werden:

- a) Die frei wählbare Referenzbahn  $r_n$  ermöglicht eine gute Anpassung an spezielle Fragestellungen (z.B. Bestimmung höherer zonaler und tressaler Potentiaalkoeffizienten bei bekannten niederen zonalen und tesseralen Termen).
- b) Jede Satellitenbahn liefert mehr Bestimmungs-gleichungen als unbekannte Potentiaalkoeffizien-ten.- Die Benützung mehrerer Bahnen ermöglicht Kontrollen und durch Auswahl geeigneter Glei-chungen verschiedener Systeme kann eine gute Konditionierung der Gleichungssysteme erreicht werden.
- c) Eine Bahntheorie ist nicht erforderlich. Darüber hinaus entfällt eine explizite Reduktion der Beobachtungen wegen des Anteiles  $\mathfrak{g}$  am Kraftfeld;  $\mathfrak{g}$  kann vom Referenzkraftfeld  $R_n$  aufgenommen wer-den, d.h. die Reduktion der Beobachtungen erfolgt implizit mit der Berechnung der bestimmten Inte-grale in (20).
- d) Die Methode lässt völlig freie Hand bei der Dar-stellung des Gravitationspotentials;  $U$  kann auch durch eine Entwicklung nach LAME-Funktionen oder mit Hilfe mittlerer Schwereanomalien dargestellt werden.

### 3. Zusammenfassung, Ausblick

Die HAMMERSTEIN-Methode bietet weitere Anwendungs-möglichkeiten auf Probleme der Satellitengeodäsie, wie z.B. die Bestimmung geozentrischer Stations-koordinaten (vgl.[16]), die derzeit im Rahmen einer Dissertation untersucht wird, oder die Ableitung mittlerer Schwereanomalien (vgl.[4]).- Über zahl-reiche, an Hand simulierter Satellitenbeobachtungen ausgeführte Testrechnungen wurde in [5] und [11] berichtet; für die Koeffizienten der zonalen Anteile könne diese als abgeschlossen gelten, für die tesse-ralen Anteile wurden sie begonnen.- In Zusammenar-beit mit den Kollegen F. BARLIER und G. BRACHET (Observatoire Meudon) wird derzeit die Bestimmung von Abweichungsvektoren  $\vartheta(t)$  aus wirklichen Satelli-tenbeobachtungen vorbereitet. Weiter ist vorgesehen,

ab Mitte 1971 Beobachtungen aus dem ISAGEX-Projekt einzusetzen. Alle Rechenprogramme wurden schon jetzt so ausgelegt, daß sie ohne große Umstellung dafür benutzt werden können.

#### 4. Literatur

- [1] A. Bjerhammar, A New Approach to Satellite Geodesy, USAE-GIMRADA, 1967
- [2] H. Bucerius,  
M. Schneider, Himmelsmechanik I, II  
B-I-Hochschultaschenbücher  
Bd. 143, 143a, Bd. 144, 144a
- [3] Ch. Reigber, Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen, Veröff. DGK, Reihe C, Heft Nr. 137, München 1969
- [4] Ch. Reigber, Bestimmung mittlerer Schwereanomalien mittels verallgemeinerter FOURIER-Analyse von Satellitenbahnen, BMBW-FB W 70- (erscheint 1970)
- [5] Ch. Reigber, Testrechnungen zur Bestimmung des zonalen Anteils des Gravitationsfeldes der Erde aus Koordinatenstörungen von Satelliten, BMBW-FB, W 70-37, Juni 1970
- [6] M. Schneider, Lösungsvorschlag zum Bahnbestimmungsproblem, BMBW-FB, W 67-35, Oktober 1967
- [7] M. Schneider, Bahnbestimmung mittels rekursiver Lösungsdarstellung, BMwF-FB, W 68-08, Jan. 1968
- [8] M. Schneider, Zum Bahnbestimmungsproblem der Satellitengeodäsie, BMwF-FB, W 68-11, Febr. 1968
- [9] M. Schneider, Outline of a General Orbit Determination Method, Space Research IX, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1969, S. 37-40

- [10] M.Schneider, Zur dynamischen Nutzung der Bahnen künstlicher Satelliten, BMwF-FB, W 68-55, August 1968
- [11] M.Schneider, Ch. Reigber, On the Determination of Field Parameters Using a Generalized FOURIER-Analysis, in Dynamics of Satellites, Springer Verlag 1970, S.181-188
- [12] R.Sigl und E. Grotens Dynamische Satellitengeodäsie Ein Überblick, Teil I: Allgemeine Grundlagen; Veröff. DGK, Reihe A, Heft 49/1, München 1966
- [13] R. Sigl und E. Grotens, Dynamische Satellitengeodäsie, Teil II, Methoden, mit einem Anhang von M. Schneider, Veröff. DGK, Reihe A, Heft 49/2, München 1969
- [14] R. Sigl Teilbericht III, Dynamische Satellitengeodäsie, Deutscher Landesbericht 1963-67, Sektion Geodäsie, vorgelegt von M. Kneißl, München 1967, S. 59-61
- [15] R. Sigl, Some Investigations on Dynamical Satellite-Geodesy carried out at the Institut für Astronomische u.Physikalische Geodäsie der TH München, Symposium on Satellite Geodesy, Paris 1969
- [16] R. Sigl, M. Schneider, Ch.Reigber, H. Ludwig, Anwendung der HAMMERSTEIN'-schen Methode auf Probleme der Satellitengeodäsie und Himmelsmechanik, BMBW-FB W 70-33, Juni 1970 .

ÜBER DIE AUSGLEICHUNG DER STRECKENVIERECKE UND  
STRECKENEINSCHNITTE AUF DER SPHÄRE NACH DER METHODE DER  
BEDINGTEN BEOBSCHAUUNGEN

A. Tárczy-Hornoch

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Es kann in einigen Fällen nützlich sein, die Strecken-  
vierecke und deren Zusammensetzungen, sowie die Strecken-  
einschnitte auf der Sphäre auszugleichen. Dies kann u.a.  
dadurch erfolgen, daß man die den einzelnen Strecken ent-  
sprechenden Zentriwinkel der Erdkugel verwendet. Die Be-  
rechnung dieser Winkel aus den gemessenen Strecken soll  
hier jedoch nicht näher behandelt werden.

Wir wollen im Folgenden nur die Ausgleichung unmit-  
telbar nach den bedingten Beobachtungen behandeln.

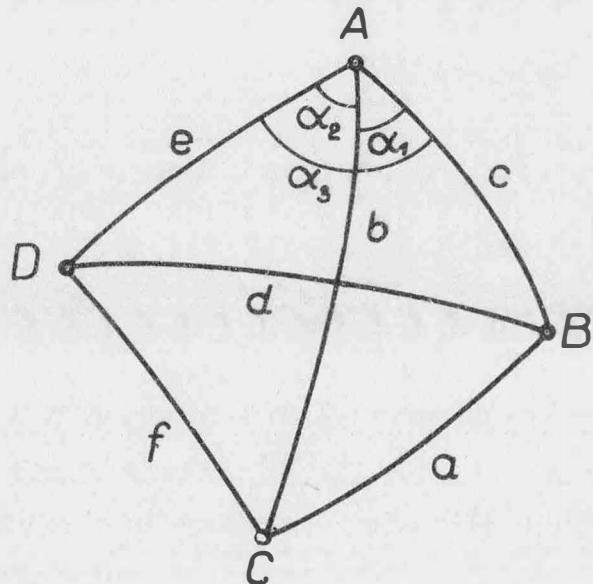


Abb. 1

Es seien in Abb. 1 die zwischen den Punkten A, B, C  
und D befindlichen Seiten a, b, c, d, e und f im

Winkelmaß, während die den gemessenen Strecken entsprechenden Winkel  $a', b', c', d', e'$  und  $f'$  sind. Es besteht dabei die Bedingungsgleichung:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \quad /1/$$

wobei nach dem sphärischen Kosinussatz:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{\cos(a' + v_a) - \cos(b' + v_b) \cos(c' + v_c)}{\sin(b' + v_b) \sin(c' + v_c)} \\ \cos \alpha_2 &= \frac{\cos(f' + v_f) - \cos(b' + v_b) \cos(e' + v_e)}{\sin(b' + v_b) \sin(e' + v_e)} \quad /2/ \\ \cos \alpha_3 &= \frac{\cos(d' + v_d) - \cos(c' + v_c) \cos(e' + v_e)}{\sin(c' + v_c) \sin(e' + v_e)} \end{aligned}$$

sind. Bezeichnen wir die den gemessenen Werten  $\alpha'$  usw. entsprechenden Winkel mit  $\alpha_1^\circ, \alpha_2^\circ, \alpha_3^\circ$  und deren durch die Verbesserungen  $v$  verursachten Änderungen mit  $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2$  und  $\delta\alpha_3$ , so werden:

$$\alpha_1 = \alpha_1^\circ + \delta\alpha_1, \quad \alpha_2 = \alpha_2^\circ + \delta\alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \alpha_3^\circ + \delta\alpha_3 \quad /3/$$

Setzt man diese Werte in Gl./1/ ein und berücksichtigt, daß

$$\alpha_1^\circ + \alpha_2^\circ - \alpha_3^\circ = \Delta\alpha \quad /4/$$

den Widerspruch der Bedingungsgleichung /1/ angibt, so wird aus Gl./1/:

$$\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 - \delta\alpha_3 + \Delta\alpha = 0 \quad /5/$$

Aus den Gln./2/ (mit Hilfe der Gln./3/) drücken wir nun  $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2$  und  $\delta\alpha_3$  durch Reihenentwicklung und Vernachlässigung der kleinen Glieder zweiter und höherer Ordnung als Funktionen der Verbesserungen aus. Es wird zunächst aus der ersten der Gln./2/:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1^\circ - \sin \alpha_1^\circ \delta\alpha_1 &= \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\sin b' \sin c'} - \frac{\sin a'}{\sin b' \sin c'} v_a + \\ &+ \frac{\sin b' \cos c' - \cos \alpha_1^\circ \cos b' \sin c'}{\sin b' \sin c'} v_b + \frac{\cos b' \sin c' - \cos \alpha_1^\circ \sin b' \cos c'}{\sin b' \sin c'} v_c \end{aligned}$$

Da die ersten Glieder beider Seiten der Gl. gleich sind, so wird daraus:

$$\begin{aligned} d\alpha_1 = & \frac{\sin a'}{\sin \alpha_1^\circ \sin b' \sin c'} v_a - \frac{\sin b' \cos c' - \cos \alpha_1^\circ \cos b' \sin c'}{\sin \alpha_1^\circ \sin b' \sin c'} v_b - \\ & - \frac{\cos b' \sin c' - \cos \alpha_1^\circ \sin b' \cos c'}{\sin \alpha_1^\circ \sin b' \sin c'} v_c - \frac{\sin a'}{\sin \alpha_1^\circ \sin b' \sin c'} v_a + \\ & + \left( \cot \alpha_1^\circ \cot b' - \frac{\cot c'}{\sin \alpha_1^\circ} \right) v_b + \left( \cot \alpha_1^\circ \cot c' - \frac{\cot b'}{\sin \alpha_1^\circ} \right) v_c \end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir aus der zweiten der Gln./2/:

$$\begin{aligned} d\alpha_2 = & \frac{\sin f'}{\sin \alpha_2^\circ \sin b' \sin e'} v_f + \left( \cot \alpha_2^\circ \cot b' - \frac{\cot e'}{\sin \alpha_2^\circ} \right) v_b + \\ & + \left( \cot \alpha_2^\circ \cot e' - \frac{\cot b'}{\sin \alpha_2^\circ} \right) v_e \end{aligned} \quad /6/$$

und aus der dritten der Gln./3/:

$$\begin{aligned} d\alpha_3 = & \frac{\sin d'}{\sin \alpha_3^\circ \sin e' \sin c'} v_d + \left( \cos \alpha_3^\circ \cot e' - \frac{\cot c'}{\sin \alpha_3^\circ} \right) v_e + \\ & + \left( \cot \alpha_3^\circ \cot c' - \frac{\cot e'}{\sin \alpha_3^\circ} \right) v_c \end{aligned}$$

Wenn wir diese Werte in die Gl./5/ einsetzen, so erhalten wir die Verbesserungsgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin a'}{\sin \alpha_1^\circ \sin b' \sin c'} v_a + \left( \cot b' (\cot \alpha_1^\circ + \cot \alpha_2^\circ) - \frac{\cot c'}{\sin \alpha_1^\circ} - \frac{\cot e'}{\sin \alpha_2^\circ} \right) v_b + \\ & + \left( \cot c' (\cot \alpha_1^\circ - \cot \alpha_3^\circ) - \frac{\cot b'}{\sin \alpha_1^\circ} + \frac{\cot e'}{\sin \alpha_3^\circ} \right) v_c - \frac{\sin d'}{\sin \alpha_3^\circ \sin e' \sin c'} v_d + \quad /7/ \\ & + \left( \cot e' (\cot \alpha_2^\circ - \cot \alpha_3^\circ) - \frac{\cot b'}{\sin \alpha_2^\circ} + \frac{\cot c'}{\sin \alpha_3^\circ} \right) v_e + \frac{\sin f'}{\sin \alpha_2^\circ \sin b' \sin e'} v_f + \Delta \alpha = 0 \end{aligned}$$

Auch hier gelten die in [1 ; S. 116-117] gemachten Feststellungen, daß die Verbesserungen jener Strecken, die den Winkeln, die in den Bedingungsgleichungen erscheinen, gegenüber liegen, in den Gln./6/ nur einmal, die übrigen zweimal erscheinen, sowie daß die Verbesserungsteile des in Gl./5/ negativen  $\Delta \alpha$ -Wertes ihre Vorzeichen ändern.

Die erhaltene Gl./7/ ist nicht mehr so einfach, wie jene der Ebene /Vgl. [1 ; Gl./8/]/. Man kann übrigens letztere auch aus der hiesigen Gl./7/ herleiten, indem die Kotangenten durch Kosinus/Sinus, weiters in den sphärischen Dreiecksseiten /aber nicht Winkeln/ die Kosinuse durch eins, die Sinuse durch die Bögen ersetzt und die erhaltenen Ausdrücke entsprechend umgeformt werden.

Infolge der einfacheren Bauart der Verbesserungs-gleichungen in der Ebene kann es in gegebenen Fällen vor-teilhaft sein, die bekannten und die gemessenen Werte der Kugel auf eine Projektionsebene zu überführen und die Aus-gleichung in dieser vorzunehmen. Noch mehr gilt dies, wenn an Stelle der Kugel das Erdellipsoid verwendet werden soll, in welchem Falle zur Ausgleichung das Streckenviereck we-nigstens annähernd orientiert sein muß. Wir wollen hier auf die nähere Behandlung dieser Fragen nicht eingehen.

Es soll dagegen im folgenden zunächst jener Fall untersucht werden, bei welchen 3 der vier Punkte A, B, C, D der Abb. 1 auf der Sphäre gegeben sind, d.h. der Fall der Ausgleichung des Streckeneinschnittes auf der Sphäre vorliegt.

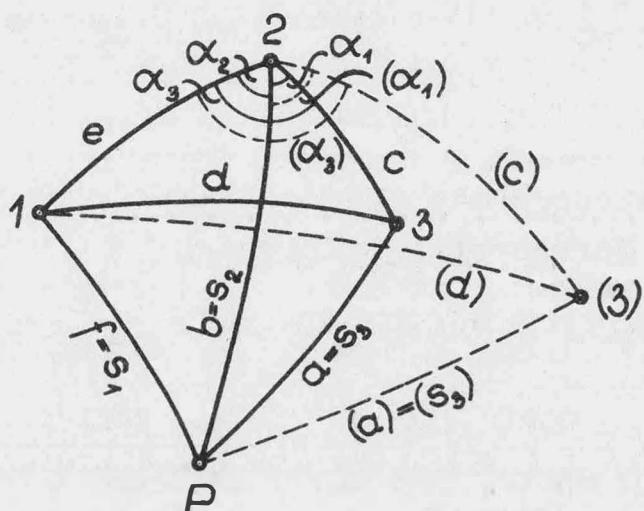


Abb. 2

Es seien in Abb. 2 die gegebenen Punkte mit 1, 2, 3, der zu bestimmende Punkt mit P bezeichnet. Dann sind c, d und e gegebene Seiten, die keine Verbesserungen erhalten. Wenn wir hier für die gemessenen Strecken die Beziehungen  $f' - \delta'_1$ ,  $b' - \delta'_2$ ,  $a' - \delta'_3$  und deren Verbesse-rungen  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  einführen, so wird aus Gl./7/ in die-sem Falle:

$$\frac{\sin \delta'_1}{\sin \alpha_2^\circ \sin \delta'_2 \sin e} v_1 + \left( \cot \delta'_2 (\cot \alpha_1^\circ + \cot \alpha_2^\circ) - \frac{\cot c}{\sin \alpha_1^\circ} - \frac{\cot e}{\sin \alpha_2^\circ} \right) v_2 + \\ + \frac{\sin \delta'_3}{\sin \alpha_1^\circ \sin \delta'_2 \sin c} v_3 + \Delta \alpha = 0 \quad /8/$$

Dabei ist hier:

$$\Delta\alpha = \alpha_1^\circ + \alpha_2^\circ - \alpha_3^\circ \quad \text{und} \quad \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = 0 \quad /9/$$

d.h. der gegebene Wert  $\alpha_3$  ändert sich nicht.

Die Gl./8/ ist bereits wesentlich einfacher, als Gl./7/ und kann daher gegebenenfalls auch gut angewendet werden.

Sind mehr als 3 Punkte gegeben, z.B. in Abb. 2 noch der Punkt /3/, so erhalten wir aus dem sphärischen Viereck 1, 2 (3) P die weitere Verbesserungsgleichung, indem in Gl./8/ an Stelle von  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ , c und  $\delta_3$  die gestrichelten Werte  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_3)$ ,  $(c)$  und  $(\delta_3')$  eingeführt werden.

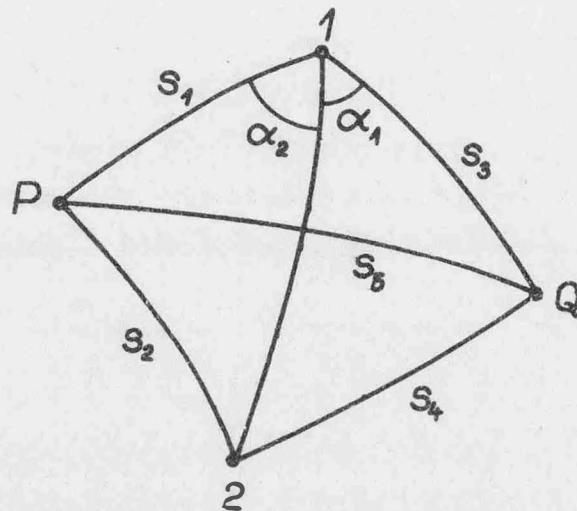


Abb 3

Wenn dagegen nur zwei Punkte /in Abb. 3 die Punkte 1 und 2/ gegeben sind, so müssen zum Streckenviereck zwei Neupunkte P und Q bestimmt werden und so entsteht die Aufgabe des Doppelpunkt-Streckenschnittes aus zwei gegebenen Punkten auf der Sphäre. Man wird in diesem Falle, ähnlich wie bei der Aufgabe in der Ebene /Vgl. [2 ; Abb. 2]/, die gegebene Seite als gemeinsamen Winkelschenkel zweier Winkel der Winkelbedingung wählen und dementsprechend in Abb. 3 im Vergleich zu Abb. 1 z.B.  $a = \delta_4$ ,  $b = \overline{1,2}$ ,  $c = \delta_3$ ,  $d = \delta_5$ ,  $e = \delta_1$  und  $f = \delta_2$  setzen. Aus der Verbesserungsgleichung /7/ verschwindet in diesem Falle wohl das lange Glied mit  $\nu_b$  nichtsdestoweniger

bleibt die entstehende Verbesserungsgleichung im Vergleich zur Gl./8/ noch immer umständlich.

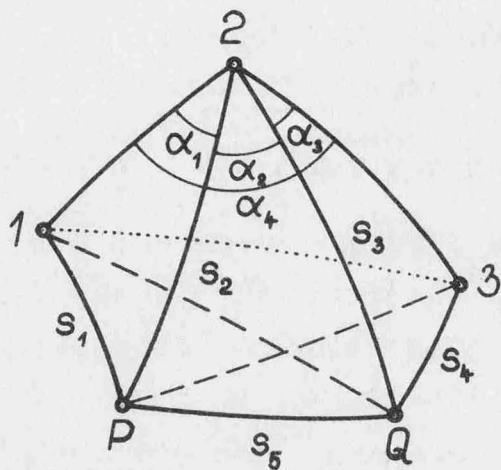


Abb. 4

Die Beziehungen werden nicht einfacher, wenn man zwei Neupunkte aus drei gegebenen Punkten nach Abb. 4 bestimmt. /Doppelpunkt-Streckeneinschnitt aus drei gegebenen Punkten auf der Sphäre/. Die Bedingungsgleichung wird in diesem Falle:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \quad /10/$$

wobei jetzt  $\alpha_4$  ein gegebener Winkel ist. Deshalb werden hier:

$$\alpha_1^\circ + \alpha_2^\circ + \alpha_3^\circ - \alpha_4 - \Delta\alpha \quad \text{und} \quad \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \delta\alpha_3 + \Delta\alpha = 0 \quad /11/$$

Die Winkel  $\delta\alpha_1$ ,  $\delta\alpha_2$ ,  $\delta\alpha_3$  können sinngemäß nach Gln./6/ als Funktionen der Streckenverbesserungen ausgedrückt werden.

Wenn auch die Strecke zwischen P und 3 gemessen wurde, so entsteht eine weitere Bedingungsgleichung:

$$\alpha_1 + 43,2 P - \alpha_4 = 0 \quad /12/$$

Wird auch die Strecke zwischen  $Q$  und  $1$  gemessen, so liefert dies noch eine zusätzliche Bedingungsgleichung:

$$\frac{1}{4}Q21 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \quad /13/$$

Gl./12/ entfällt natürlich, wenn die Strecke zwischen  $P$  und  $3$  nicht gemessen wurde.

Es sei hier bemerkt, daß an Stelle der Bedingungsgleichung /12/ auch die Bedingungsgleichung

$$\alpha_2 + \alpha_3 - \frac{3}{4}P4 = 0 \quad /14/$$

und an Stelle der Gl./13/ die Bedingungsgleichung:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{4}Q21 = 0 \quad /15/$$

verwendet werden kann. Sind beide Strecken  $1Q$  und  $3P$  gemessen, so kann auch an Stelle der Bedingungsgleichung /10/ eine Winkelbedingungsgleichung des sphärischen Vierecks  $1,3PQ$ , vorteilhaft in 1, oder 3, also etwa:

$$\frac{1}{4}3,1Q + \frac{1}{4}Q1P - \frac{1}{4}3,1P = 0 \quad /16/$$

verwendet werden, wie den Gln./14/-/16/ entsprechende Beziehungen für dieses Problem in der Ebene /Vgl. [2 ; Abb. 3]/ bereits vorgeschlagen wurden. Umgekehrt können natürlich die hiesigen Bedingungsgleichungen /10/ bis /12/ sinngemäß auch für die Ausgleichung in der Ebene Anwendung finden.

Es gibt noch eine Reihe von verwandten Doppelpunkt- und Mehrpunkt-Streckeneinschnitten. Weil aber deren Ausgleichung im Sinne der hier angeführten vorgenommen werden kann, wollen wir hier darauf nicht näher eingehen.

Die Ausgleichungen nach den bedingten Beobachtungen auf der Sphäre sind in der Regel nur dann vorteilhaft, wenn die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen unter  $2n$  bleibt, wo  $n$  die Anzahl der Neupunkte bedeutet. Ähnliches

galt auch für die Ausgleichung in der Ebene /Vgl. [2 ; letzt. Abs.]/. Sonst erhält man nach den vermittelnden Beobachtungen weniger Normalgleichungen. Die Ausgleichung der aufgeworfenen Probleme nach den vermittelnden Beobachtungen, sowie die Ausgleichung am Ellipsoid wollen wir aus Raumangel a.a.o. behandeln.

#### SCHRIFTTUM

- [1.] TARCZY-HORNOCH,A.: Über einige Ausgleichsprobleme der streckenmessenden Triangulation. Festschrift "Aus der geodätischen Lehre und Forschung" zum 70. Geburtstag von Professor Walter Großmann. Stuttgart, 1967. S. 114-122.
- [2.] TÁRCZY-HORNOCH,A.: Zur Ausgleichung der Streckeneinschnitte. Im Material der Internationalen Konferenz über Methoden und Instrumente der geodätischen Netzverdichtung zu Budapest /1970/.

BESTIMMUNG GEOCENTRISCHER KOORDINATEN (VON ERDFLÄCHENPUNKTEN) AUS  
 SATELLITENBEZOBLACHTUNGEN  
 von  
 Erik Tengström

EINLEITUNG

Wir erinnern an das Markowitzsche Princip für eine einzige Station mit bekannter Satellitenbahn (oskulierende Elemente für jede Zeit, bei der topozentrisch beobachteten Richtung  $\alpha'$ ,  $\delta'$ , gegeben) [1]

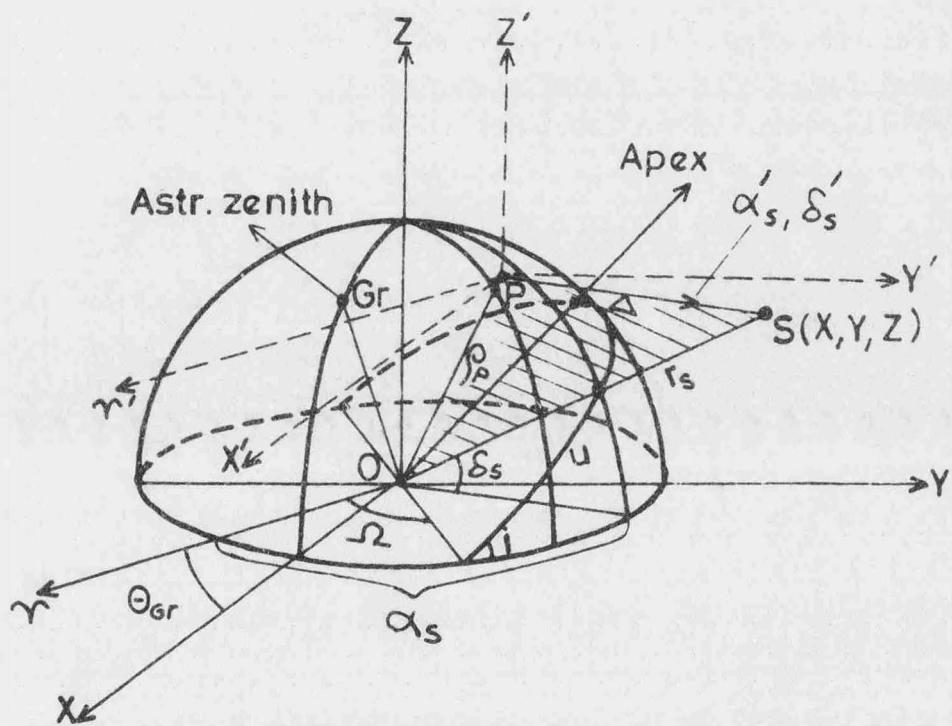


Fig 1.

Kugel mit Halbmesser  $r_{Gr}$  um O. Von P aus gesehen, wird die Richtung  $\alpha'_s, \delta'_s$  durch Vergleich mit den Sternpositionen photographisch bestimmt. O ist der Schwerpunkt der Erde.

Für das Zentrum des alten Passageinstruments in Greenwich gilt:

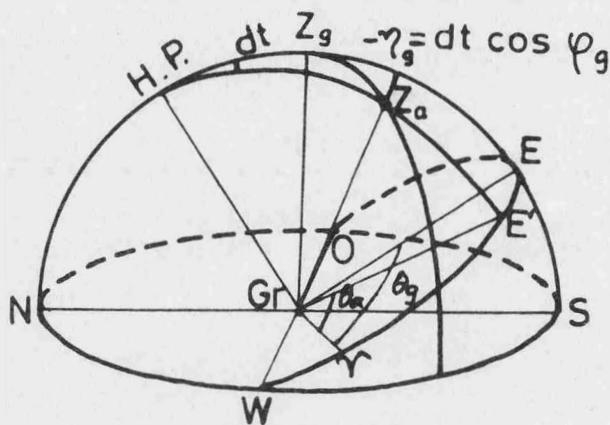


Fig. 2

$$\theta_{Gr} = \gamma_E; \quad \theta_{a_{Gr}} = \gamma_{E'}$$

$$\theta_{Gr} - \theta_{a_{Gr}} = dt = - n_{Gr} \sec \phi_{Gr}$$

$$\theta_{Gr} = \theta_{a_{Gr}} - n_{Gr} \sec \phi_{Gr}$$

Die Translation zwischen Erd-Zentrum und P gibt jetzt

$$x_s = r_s \cos \delta_s \cos(\alpha_s - \theta_{Gr})$$

$$(1) \quad y_s = r_s \cos \delta_s \sin(\alpha_s - \theta_{Gr})$$

$$z_s = r_s \sin \delta_s$$

$$x_s - x_p = \Delta \cos \delta'_s \cos(\alpha'_s - \theta_{Gr})$$

$$(2) \quad y_s - y_p = \Delta \cos \delta'_s \sin(\alpha'_s - \theta_{Gr})$$

$$z_s - z_p = \Delta \sin \delta'_s$$

Wichtig:  $\alpha'$ ,  $\delta'$  sind geometrisch momentan, das heisst, auf momentanes Äquinoktium bezogen, ohne jährlichen und täglichen Aberrationseffekt, Planetenaberration, Refraktion und Lichtzeit, deren Effekte schon berücksichtigt sind.  $\alpha_s'$ ,  $\delta_s'$  sind auch ohne Aberration aus der Satellitenbahn berechnet!

Aus (1) und (2) haben wir

$$r_s \cos \delta_s \cos(\alpha_s - \theta_{Gr}) - x_p = \Delta \cos \delta_s' \cos(\alpha_s' - \theta_{Gr})$$

$$(3) \quad r_s \cos \delta_s \sin(\alpha_s - \theta_{Gr}) - y_p = \Delta \cos \delta_s' \sin(\alpha_s' - \theta_{Gr})$$

$$r_s \sin \delta_s - z_p = \Delta \sin \delta_s'$$

Wenn man in (3)  $\Delta$  eliminiert, bekommt man

$$x_p \sin(\alpha_s' - \theta_{Gr}) - y_p \cos(\alpha_s' - \theta_{Gr}) = r_s \cos \delta_s \sin(\alpha_s' - \alpha_s)$$

$$(4) \quad x_p \cos(\alpha_s' - \theta_{Gr}) + y_p \sin(\alpha_s' - \theta_{Gr}) - z_p \cot \delta_s' =$$

$$r_s \{ \cos \delta_s \cos(\alpha_s' - \alpha_s) - \sin \delta_s \cot \delta_s' \}$$

Mit angenäherten Werten von  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $z_p$ , sodass  $x_p = \hat{x}_p + \Delta x$ ,  $y_p = \hat{y}_p + \Delta y$ ,  $z_p = \hat{z}_p + \Delta z$ , und mit  $\theta_{Gr} = \theta_{aGr} - n_{Gr} \sec \phi_{Gr}$  haben wir zwei Gleichungen der Form

$$(5) \quad a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z + d_1 n_{Gr} \sec \phi_{Gr} - L_1 = \epsilon_1$$

$$a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z + d_2 n_{Gr} \sec \phi_{Gr} - L_2 = \epsilon_2$$

wobei  $\epsilon$  und  $L$  den folgenden Werten entsprechen: ( $\alpha_s'$ ,  $\delta_s'$  sind aus den Messungen  $x_s$ ,  $y_s$  auf der photographischen Aufnahme hergeleitet)

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= \epsilon_{\alpha'} \{ r_s \cos \delta_s \cos(\bar{\alpha}'_s - \alpha_s) - \hat{x}_p \cos(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) - \hat{y}_p \sin(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) \} \\
 &\quad + \epsilon_t \{ \hat{x}_p \cos(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) + \hat{y}_p \sin(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) \} \\
 (5a) \quad \epsilon_2 &= \epsilon_{\alpha'} \{ -\cos \delta_s \sin(\bar{\alpha}'_s - \alpha_s) + \hat{x}_p \sin(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) - \hat{y}_p \cos(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) \} \\
 &\quad + \epsilon_{\delta'} \left[ \frac{r_s \sin \delta_s}{\sin^2 \bar{\delta}'_s} - \frac{\hat{z}_p}{\sin^2 \bar{\delta}'_s} \right] + \epsilon_t \{ \hat{y}_p \cos(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) - \hat{x}_p \sin(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) \}
 \end{aligned}$$

wo  $\alpha'_s = \bar{\alpha}'_s + \epsilon_{\alpha'}$ ;  $\delta'_s = \bar{\delta}'_s + \epsilon_{\delta'}$ ;  $t = \bar{t} + \epsilon_t$  ( $t = \theta_{a_{Gr}}$  was aus  $T = \text{UTC}$  der Beobachtung berechnet wird).

Weiter

$$\begin{aligned}
 L_1 &= r_s \cos \delta_s \sin(\bar{\alpha}'_s - \alpha_s) - \hat{x}_p \sin(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) + \hat{y}_p \cos(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) \\
 (5b) \quad L_2 &= r_s \{ \cos \delta_s \cos(\bar{\alpha}'_s - \alpha_s) - \sin \delta_s \cot \bar{\delta}'_s \} - \{ \hat{x}_p \cos(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) \\
 &\quad + \hat{y}_p \sin(\bar{\alpha}'_s - \bar{t}) \} + \hat{z}_p \cot \bar{\delta}'_s
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a, b, c, d$  sind aus den beobachteten Quantitäten und den angenommenen Werten der Unbekannten zu berechnen!

Mit bekannten oskulierenden Elementen für jede Beobachtung  $\bar{\alpha}'_s, \bar{\delta}'_s$  brauchen wir mindestens zwei Exponierungen um die vier Unbekannten  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  und  $n_{Gr}$  bestimmen zu können! Jede Exponierung gibt nämlich zwei Beobachtungsgleichungen!

Sind alle Beobachtungsgleichungen als unabhängig zu behandeln, das heisst, sind alle  $\epsilon$  korrelationsfrei, kann man mit mehr als zwei Gleichungen das Prinzip des kleinsten Wertes von [pvw] verwenden:

Mit sehr guten Zeitbestimmungen von genauen Positionen, was vermutlicherweise in der nächsten Zukunft realisiert werden kann, würde man  $\epsilon_t$  leicht unterdrücken können (auch bei passiven Satellitenbeobachtungen) in Vergleich zu  $\epsilon_{\alpha'}$  und  $\epsilon_{\delta'}$ .

Nun, wenn, wie wir behaupten können,  $\epsilon_x^s$ ,  $\epsilon_y^s$  der x und y - Messungen auf der photographischen Platte unkorreliert sind bzw jeder Koordinaten-Fehler normalverteilt ist, so werden auch

$$\epsilon_{\alpha'} = p\epsilon_{x_s} + q\epsilon_{y_s}$$

$$\epsilon_{\delta'} = r\epsilon_{x_s} + s\epsilon_{y_s}$$

unkorreliert und normalverteilt.

Die Gleichungen (5) haben jetzt für  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  die Form

$$\epsilon_1 = u_1 \epsilon_{\alpha'}$$

$$\epsilon_2 = u_2 \epsilon_{\alpha'} + v_2 \epsilon_{\delta'}$$

und können daher auch als unkorreliert und normalverteilt angesehen werden.

Die Gewichte der L-Quantitäten werden aus

$$m_{\alpha'}^2 = p^2 m_{x_s}^2 + q^2 m_{y_s}^2 (+ m_{\alpha'}^2(\text{Red}) + m_{\alpha'}^2(\text{Korr}))$$

$$m_{\delta'}^2 = r^2 m_{x_s}^2 + s^2 m_{y_s}^2 (+ m_{\delta'}^2(\text{Red}) + m_{\delta'}^2(\text{Korr}))$$

berechnet.

$$( p_{L_1} = \frac{\text{konst.}}{u_1^2 m_{\alpha'}^2}, \quad p_{L_2} = \frac{\text{konst.}}{u_2^2 m_{\alpha'}^2 + v_2^2 m_{\delta'}^2} )$$

Notiere, dass die  $m_x$ ,  $m_y$  am besten durch quadratische Anpassungen der gemessenen Plattenkoordinaten

$$x_s = a_x t^2 + b_x t + c_x$$

$$y_s = a_y t^2 + b_y t + c_y$$

bestimmt werden können.

Bei dem Übergang von  $m_x$ ,  $m_y$  zu  $m_a$ ,  $m_{\delta'}$  sollten eigentlich die Reduktionsmittelfehler und der mittlere Fehler der angebrachten Korrekturen mitgerechnet werden. Wir haben aber den Ausdruck in Klammern unterdrückt, weil er (sehr) klein ist, im Vergleich zu den Gliedern in  $m_x^2_s$  und  $m_y^2_s$ .

Weiter I) p, q, r, s werden aus den linearen Gliedern der Platten-gleichungen

$$a' = \text{konst}_{a'} + px + qy + \dots$$

$$\delta' = \text{konst}_{\delta'} + rx + sy + \dots$$

entnommen:

Gewöhnlich schreiben wir (und bekommen wir bei der Reduktion)

$$\xi = \text{konst}_\xi + p_\xi x + q_\xi y + \dots$$

$$n = \text{konst}_n + r_n x - s_n y + \dots$$

Aber

$$p = p_\xi \sec \delta'_0 ; \quad q = q_\xi \sec \delta'_0$$

$$r = r_n ; \quad s = s_n$$

(wo  $\delta'_0$  die Deklination der Plattenmitte ist) mit genügenden Genauigkeit.

II) Die Ausgleichung von  $v_{x_s} = a_x t^2 + b_x t + c_x - x_s$  etc gemessen

(alle vom gleichen Gewicht) gibt die  $m_x$  und  $m_y$  der Plattenkoordinaten der Satellitenpunkte.

## MARKOWITZSCHE METHODE MIT MEHREREN TEILNEHMENDEN STATIONEN

Verwendung von ED - Datumgrößen um die Verbesserungen einer teilnehmenden Station  $\Delta x_v, \Delta y_v, \Delta z_v$  in den Verbesserungen  $\Delta x_M, \Delta y_M, \Delta z_M$  einer Zentralstation P = M ausdrücken zu können.

$\hat{x}_v, \hat{y}_v, \hat{z}_v$  als auch  $\hat{x}_M, \hat{y}_M, \hat{z}_M$  berechnen wir mit unkorrigierten ED - Größen in M und mit  $n_{Gr} = 0$ . Das heisst  $\Delta \xi_{ED}(M) = \Delta n_{ED}(M) = 0, N(M) = N_{ED}(M) = 0$  wenn, wie wir tun wollen, M identisch mit dem Halteturm in Potsdam (P) zu definieren ist. Der internationale Halbmesser a ist aber, das wissen wir heute, zu gross. Ein guter Wert für die theoretische Erde mit  $a = 1/297$  ist 6378193 m, sodass die Näherungswerte der v-Punkte von P aus berechnet werden können (mit Hilfe der V.M.-en Übertragungsformeln, die Terme von  $\frac{p''}{a^m}$  195<sup>m</sup> enthalten müssen), z.B.

$$\begin{aligned}\hat{x}_v &= (\hat{T}_v + h_v + \hat{N}_v) \cos \left[ \phi_{v,ED} + \left[ \sin(\phi_{v,ED} - \phi_{P,ED}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cos \phi_{P,ED} \sin \phi_{v,ED} \sin^2 \frac{1}{2}(\lambda_{v,ED} - \lambda_{P,ED}) \right] \frac{p''}{a^m} 195^m \right]. \\ &\quad \cos \left[ \lambda_{v,ED} + \sec \phi_{v,ED} \cos \phi_{P,ED} \sin(\lambda_{v,ED} - \lambda_{P,ED}) \frac{p''}{a^m} 195^m \right] \\ &= (\hat{T}_v + h_v + \hat{N}_v) \cos \phi_{v,ED} \cos \lambda_{v,ED} \quad \text{etc.,}\end{aligned}$$

wo  $\hat{T}$  (Querkrümmungsradius) aus  $a = 6378193$  m in  $\phi = \phi_{ED}$  berechnet wird. Weiter ist jetzt

$$\hat{N}_v = N_{v,ED} + 2 \left[ \sin^2 \frac{1}{2}(\phi_{v,ED} - \phi_{P,ED}) + \cos \phi_{v,ED} \cos \phi_{P,ED} \sin^2 \frac{1}{2}(\lambda_{v,ED} - \lambda_{P,ED}) \right] 195^m$$

Wir bekommen für P

$$\begin{aligned}\Delta x_P &= x_P - \hat{x}_P = (T_P + h_P + N_P)_{abs} \cos \phi_{P,geod} \cos \lambda_{P,geod} \\ (7a) \quad &\quad - (\hat{T}_P + h_P + \hat{N}_P) \cos \phi_{P,ED} \cos \lambda_{P,ED} \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

und für v

$$(7b) \quad \begin{aligned} \Delta x_v = x_v - \hat{x}_v &= (T_v + h_v + N_v)_{\text{obs}} \cos \phi_v^{\text{geod}} \cos \lambda_v^{\text{geod}} \\ &\quad - (\hat{T}_v + h_v + \hat{N}_v) \cos \phi_v^{\text{ED}} \cos \lambda_v^{\text{ED}}. \quad \text{etc} \end{aligned}$$

Wir erhalten  $T_v = \hat{T}_v - \Delta a$ , wenn wir annehmen, dass die theoretische Erde noch  $\Delta a^m$  kürzer ist, was heutzutage als plausibel erscheint.

Die rechte Seite von (7) wird jetzt die unbekannten  $\Delta \xi_p$ ,  $\Delta n_p$ ,  $N_p$ ,  $\Delta a$  und  $n_{\text{Gr}}$  enthalten. Es ist also möglich  $\Delta x_v$ ,  $\Delta y_v$  und  $\Delta z_v$  statt in diesen Unbekannten, in  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$ ,  $\Delta z_p$ ,  $\Delta a$  und  $n_{\text{Gr}}$  auszudrücken. Diese werden für  $\Delta x_v$ ,  $\Delta y_v$  und  $\Delta z_v$  in die Markowitzschen Gleichungen für die Station v eingeführt, womit die Beobachtungsgleichungen in jeder v-Station auch fünf lineare Glieder von resp.  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$ ,  $\Delta z_p$ ,  $n_{\text{Gr}}$ , und  $\Delta a$  enthalten.

### DIE LAGRANGESCHEN STÖRUNGSGLEICHUNGEN

Diese Gleichungen, die benutzt werden müssen, um die osculierenden Bahnelemente zur Zeit der Beobachtung berechnen zu können, sind in folgender Form gegeben:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{dp}{du} &= \frac{2 \gamma_u}{fM} r^3 (T_1 + T_2) \\ \frac{de_i}{du} &= \frac{r^2 \gamma_u}{fM} \left[ - \cos u (S_1 + S_2) + \sin u (1 + \frac{r}{p}) (T_1 + T_2) \right. \\ &\quad \left. + e_i \frac{r}{p} (T_1 + T_2) + e_n \frac{r}{p} \cot i \cdot \sin u (W_1 + W_2) \right] \\ \frac{de_u}{du} &= \frac{r^2 \gamma_u}{fM} \left[ \sin u (S_1 + S_2) + \cos u (1 + \frac{r}{p}) (T_1 + T_2) \right. \\ &\quad \left. + e_n \frac{r}{p} (T_1 + T_2) + e_i \frac{r}{p} \cdot \cot i \cdot \sin u (W_1 + W_2) \right] \end{aligned}$$

$$(8) F \quad \frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3 \gamma_u}{fM_p} \frac{\sin u}{\sin i} \cdot (w_1 + w_2); \quad \frac{di}{du} = \frac{r^3 \gamma_u}{fM_p} \cos u \cdot (w_1 + w_2)$$

wo  $e_i = \cos w$ ;  $e_u = \sin w$ , und die Näherung

$$\gamma_u = \frac{1}{1 - \frac{r^3}{fM_p} \cot i \cdot \sin u \cdot (w_1 + w_2)} = 1$$

für Satelliten mit  $i > 70^\circ$  stets zugelassen ist.

Einfache Modelle des Erdfeldes bzw der Atmosphäre werden benutzt um  $S_1 + S_2$  etc als Funktionen von  $u$  und den Elementen zu berechnen.  $S_1$  etc entsteht aus dem nichtzentralen Feld der Schwerkraft,  $S_2$  etc aus dem "Dragoeffekt".  $S$ ,  $T$ ,  $W$  sind bezeichnungsweise die Komponenten der Störungskräfte entlang des Radius Vectors, senkrecht dazu in der oskulierenden Ebene, und senkrecht zur Bahn.

Als sechstes Element wählen wir die oskulierende Zeit  $T_\Omega$  des Durchgangs durch den aufsteigenden Knoten (in UTC). Wir haben aus

$$\frac{dT}{du} = \frac{r^2 du}{\sqrt{fM_p}} \quad (8a) \quad \text{und} \quad T - T_\Omega = \int_0^u \frac{r^2 du}{\sqrt{fM_p}} \quad (8b)$$

wodurch in (8b),  $r$  und  $p$  der oskulierenden Bahn zur Zeit  $T$  entsprechen,

$$T_o - (\hat{T}_\Omega + \Delta T_\Omega) = \frac{(\hat{p} + \Delta p)^{3/2}}{\sqrt{fM}} \int_{u_0}^u \frac{du}{[1 + (\hat{e}_i + \Delta e_i) \cos u + (\hat{e}_n + \Delta e_n) \sin u]^2}$$

$$\text{und} \quad T - T_o = \frac{1}{\sqrt{fM}} \int_{u_0}^u \frac{p^{3/2}(u) du}{[1 + e_i(u) \cos u + e_n(u) \sin u]^2}$$

woraus folgt, dass sich  $u$  allgemein aus  $T$ , den zur Zeit  $T_o$  angenommenen Werten der sechs Elemente ( $\hat{p}$ ,  $\hat{e}_i$ ,  $\hat{e}_n$ ,  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{i}$ ,  $\hat{T}_\Omega$ ), und einem linearen Ausdruck deren Verbesserungen ( $\Delta p$ ,  $\Delta e_i$ ,  $\Delta e_n$ ,  $\Delta \Omega$ ,  $\Delta i$ ,  $\Delta T_\Omega$ ) ausdrücken lässt.

Man erhält schliesslich 6 Ausdrücke (z.B.  $p$ ,  $e_i$ ,  $e_n$ ,  $\Omega$ ,  $i$ ,  $T_\Omega$ ) zu jeder Beobachtungszeit von der Form

$$(9) \quad \hat{e} = \hat{e}_0 + F_e(T - T_0) + \sum f_{e_\mu}(T - T_0) \Delta e_\mu$$

wo  $\Delta e_\mu$  die Verbesserung eines der sechs Elemente zur Zeit  $T_0$  bezeichnet.

Wenn man jetzt aus (9)  $r_s$ ,  $a_s$ ,  $\delta_s$  mit den bekannten Beziehungen

$$(10) \quad r_s = \frac{p}{1 + e_i \cos u_s + e_n \sin u_s}$$

$$\cos(a_s - \Omega) \cos \delta_s = \cos u_s$$

$$\sin \delta_s = \sin i \cdot \sin u_s$$

in  $T$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta e_i$ ,  $\Delta e_n$ ,  $\Delta \Omega$ ,  $\Delta i$  und  $\Delta T_\Omega$  ausdrückt und in die Markowitzschen Gleichungen einsetzt, bekommt man für jede Beobachtung  $\bar{a}'_s$ ,  $\bar{\delta}'_s$ ,  $T$  von einer die Passage beobachtenden Station ( $v$ ) zwei lineare Fehlergleichungen

$$(5c) \quad \begin{aligned} & a_{11v} \Delta x + a_{12v} \Delta y + a_{13v} \Delta z + a_{14v} \Delta a + a_{15v} n_{Gr} + a_{16v} \Delta p \\ & + a_{17v} \Delta e_i + a_{18v} \Delta e_n + a_{19v} \Delta \Omega + a_{1,10v} \Delta i + a_{1,11v} \Delta T_\Omega + \xi_{1v} = \epsilon_{1v} \\ & a_{21v} \Delta x + a_{22v} \Delta y + a_{23v} \Delta z + a_{24v} \Delta a + a_{25v} n_{Gr} + a_{26v} \Delta p \\ & + a_{27v} \Delta e_i + a_{28v} \Delta e_n + a_{29v} \Delta \Omega + a_{2,10v} \Delta i + a_{2,11v} \Delta T + \xi_{2v} = \epsilon_{2v} \end{aligned}$$

wo die  $\epsilon_v$  wieder als normalverteilt und unabhängig angesehen werden können. Die  $\xi$  sollen mit der wirklichen Beobachtungszeit und den Elementen  $\hat{e} + F_e(T - T_0)$  berechnet werden. Als Gewichte können wir dieselben Ausdrücke  $p_{L_1}$  und  $p_{L_2}$  wie vorher benutzen.

Man sieht, dass mindestens 6 Beobachtungen  $\bar{a}'$ ,  $\bar{\delta}'$ ,  $T$  längs einer Passage notwendig sind um eine Ausgleichung für die Bestimmung von  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $n_{Gr}$  und  $\Delta a$  machen zu können, wo  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  sich auf die Zentralstation beziehen.

## MODELLE FÜR INTERPOLATIONEN DER OSKULIERENDEN ELEMENTE

Das Schwerkraftsmodell der Erde kann aus dem allgemeinen Ausdruck des Gravitationspotentials konstruiert werden. Wir bekommen die Störungskomponenten  $S_1$ ,  $T_1$ , und  $W_1$  direkt aus der Potentialdifferenz der Erde ( $E$ ) und des Zentralmassenmodells:

$$(11) \quad \Delta V = V(E) - \frac{fM}{r} = - \frac{fM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n (\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \left[ J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda \right] P_{nm} (\cos \theta) \right]$$

Das Störungspotential in der physikalischen Geodäsie ist indessen

$$\hat{T} = V(E) - \frac{fM}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2 (\cos \theta) - J_4 \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_4 (\cos \theta) \right],$$

woraus wir

$$\Delta V \text{ km}^2 \text{ sek}^{-2} = \hat{T} - \frac{fM}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cdot 5.461 \cdot 10^{-4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{fM}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^4 1.06 \cdot 10^{-5} (\cos^4 \theta - \frac{6}{7} \cos^2 \theta + \frac{3}{35})$$

erhalten. Die numerischen Werte von  $J_2$  und  $J_4$  entsprechen hier dem Ellipsoidmodell (Niveauellipsoid) mit  $a = 6378193 \text{ m}$ ,  $\alpha = 1/297$

Wenn  $\Delta V$  in mgalm ausgedrückt werden soll, erhalten wir

$$(12) \quad \Delta V = \hat{T}_{\text{mgalm}} - \frac{fM}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cdot 5.461 \cdot 10^7 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{fM}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^4 \cdot 1.06 \cdot 10^6 (\cos^4 \theta - \frac{6}{7} \cos^2 \theta + \frac{3}{35})$$

Wieviel ändern sich die Satellitenbahnelemente infolge der  $\hat{T}$ -Werte und des Elliptizitätsteiles von  $S_1$ ,  $T_1$  und  $W_1$ ?

Hier muss erwähnt werden, dass  $\hat{T}$  eine Funktion der Werte von  $r$ ,  $\theta(\delta)$  und  $\lambda$  des Satelliten ist. Wir haben aber

$$\cos \theta_s = \sin \delta_s = \sin i \cdot \sin u_s$$

$$\lambda_s = \alpha_s - \theta_{Gr}$$

$$\cos(\alpha_s - \Omega) = \frac{\cos u_s}{\sin \theta_s} = \frac{\cos u_s}{\cos \delta_s}, \text{ d.h.}$$

$$\cos(\lambda_s + \theta_{Gr} - \Omega) = \frac{\cos u_s}{\sin \theta_s},$$

oder

$$\lambda_s = \Omega - \theta_{Gr} + \arctg(\cos i \cdot \tan u_s)$$

(13)

$$\theta = \arccos(\sin i \cdot \sin u_s)$$

Für den Elliptizitätsteil  $\Delta V(\alpha)$  bleibt indessen nur eine Abhängigkeit vom  $r$  und  $\theta$  übrig, sodass wir schreiben können:

$$(14) \quad \begin{aligned} S_1(\alpha) &= \frac{\partial \Delta V(\alpha)}{\partial r} = 16.383 \cdot 10^{-4} \frac{fM(a)^2}{r^2} \left[ 3 \sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1 \right. \\ &\quad \left. - 0.0324 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \left[ \sin^4 i \cdot \sin^4 u - \frac{6}{7} \sin^2 i \cdot \sin^2 u + \frac{3}{35} \right] \right] \text{ km/sec}^2 \\ T_1(\alpha) &= \frac{\partial \Delta V(\alpha)}{r \partial u} = - 16.383 \cdot 10^{-4} \frac{fM(a)^2}{r^2} \sin^2 i \cdot \sin 2u \cdot \\ &\quad \cdot \left[ 1 - 0.0129 \left( \frac{a}{r} \right)^2 (\sin^2 i \cdot \sin^2 u - \frac{3}{7}) \right] \text{ km/sec}^2 \\ W_1(\alpha) &= \frac{\partial \Delta V(\alpha)}{r \partial n} = - 16.383 \cdot 10^{-4} \frac{fM(a)^2}{r^2} \sin 2i \cdot \sin 2u \cdot \\ &\quad \cdot \left[ 1 - 0.0129 \left( \frac{a}{r} \right)^2 (\sin^2 i \cdot \sin^2 u - \frac{3}{7}) \right] \text{ km/sec}^2 \end{aligned}$$

Für den physikalisch-geodätischen Anomalienteil bekommen wir:

$$S_1(\text{geod}) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} = -\delta g_{\text{magal}}(r, \theta, \lambda) \cdot 10^{-8} \text{ km/sec}^2$$

$$(15) T_1(\text{geod}) = -\frac{fM}{r^2 \rho' \sin \theta} \left[ \xi'(r, \theta, \lambda) \sin i \cdot \cos u + n''(r, \theta, \lambda) \cos i \right] \text{ km/sec}^2$$

$$W_1(\text{geod}) = \frac{\gamma \text{ km/sec}^2}{\rho' \sin \theta} \left[ \xi''(r, \theta, \lambda) \cos i - n''(r, \theta, \lambda) \sin i \cdot \cos u \right] \text{ km/sec}^2$$

Für kreisnahe Bahnen können die "Drag"-Kräfte in folgender Weise geschrieben werden

$$S_2 = -\frac{1}{2} \rho \kappa_S F \cdot \frac{fM}{\rho} \frac{p}{r} e \sin f \cdot 10^5 \text{ km/sec}^2$$

$$(16) T_2 = -\frac{1}{2} \rho \kappa_T F \frac{fM}{r} (1 + e \cos f) \cdot 10^5 \text{ km/sec}^2$$

$$W_2 = -\frac{1}{2} \rho \kappa_W F \frac{fM}{r} \beta T_d \cos u \cdot \sin i (1 - e \cos f) \text{ km/sec}^2$$

wo  $e \cos f = e_i \cos u + e \sin u$ ,  $\rho$  Dichte der Luft,  $\kappa = \frac{A^2}{m^g} C_D$  mit Querschnittsfläche A, Gewicht m und "Drag"-Faktor  $C_D$  von  $g$  der Querschnittsform abhängig ist. Weiter ist

$$F = 1 - \frac{2\beta T_d \cos i}{1 + 2e \cos f},$$

wo  $\beta \leq 1$  den Verzögerungsfaktor der rotierenden Atmosphäre und  $T_d$  die Satellitenperiode in Tagen bedeutet [3].

Mit Anwendung der Ausdrücke (14), (15) und (16), die alle fundamentale Störungskräfte der Lagrangeschen Gleichungen beschreiben, ist es nun möglich von der Epoche  $T_0$  die Änderungen der oskulierenden Elemente bis zur Epoche  $T$  der aktuellen Beobachtung durch eine für unsere Zwecke genügend genaue Integration zu berechnen. Diese Änderungen erhalten natürlich auch linear die 6 unbekannten Verbesserungen der angenommenen Elemente zur Epoche  $T_0$ , welche - mit (10), wie wir in (9) gesehen haben - somit in den Gleichungen (5c) nebst  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, n_{Gr}$  eingehen werden.

BEISPIEL DER ELEMENTÄNDERUNGEN FÜR EINEN SATELLITEN, DESSEN OSKULIERENDE BAHN ZUR ZEIT  $T_0$  KREISFÖRMIG IST UND DESSEN BAHNSCHIEFE  
 $i = 90^\circ$  BETRÄGT.

SCHLUSSBEMERKUNGEN.

Wenn wir auch, in diesem Beispiel, die Dimensionen genügend klein, und das Gewicht des Satelliten mitsamt dessen Kreisbahnradius genügend gross wählen (zum Beispiel  $A = 10^5 \text{ cm}^2$ ,  $m = 5 \cdot 10^5 \text{ g}$ ,  $a_0 = p_0 = 7500 \text{ 000 m}$ ), so kann leicht gezeigt werden, dass für die kurzen Bahnbögen, welche in unserer Methode aktuell sind (Größenordnung  $60^\circ$ ), die Influenz der "Drag"-Effekte versäumt werden kann. Obenerwähnte Daten erinnern an die Daten von Agenaraketen einiger amerikanischen Satelliten, die mit mässig grossen Kameras photographisch beobachtungsbare sind.

Die Änderungen der oskulierenden Elemente sind somit in erster Näherung, gemäss (8), (14) und (15)

$$\Delta p_{u_0}^u = 8.881(\cos 2u - \cos 2u_0) + 0.010(\cos 4u - \cos 4u_0)$$

$$- 0.073 \xi''(u - u_0) \text{ km}$$

$$\begin{aligned} \Delta e_i^u &= -0.0008880(\sin u - \sin u_0) + 0.0006902(\sin 3u - \sin 3u_0) \\ &+ 0.0000009(\sin 5u - \sin 5u_0) + 0.0000014 \int_{u_0}^u \delta g(r, \theta, \lambda) \cos u du \\ &- 0.0000097 \int_{u_0}^u \xi''(r, \theta, \lambda) \sin u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta e_n^u &= -0.0002951(\cos u - \cos u_0) + 0.0006909(\cos 3u - \cos 3u_0) \\ &+ 0.0000009(\cos 5u - \cos 5u_0) - 0.0000014 \int_{u_0}^u \delta g(r, \theta, \lambda) \sin u du \\ &- 0.0000097 \int_{u_0}^u \xi''(r, \theta, \lambda) \cos u du \end{aligned}$$

$$\Delta \Omega_{u_0}^u = - \int_{u_0}^u n''(r, \theta, \lambda) \sin u du \quad \text{Bogensekunden}$$

$$\Delta i_{u_0}^u = - \int_{u_0}^u n''(r, \theta, \lambda) \cos u du \quad -" -$$

Wenn die Beobachtungen sich symmetrisch zur Zentralstation verteilen, werden augenscheinlich konstante Fehler in den angenommenen gravimetrisch-geodätischen  $\xi$ - und  $n$ -Werten unschädlich. Die übrigbleibenden Fehler sind klein genug, wenigstens für nord-südliche Passagen über eine Station in Mitteleuropa und sollten die Interpolationen mit weniger als  $0^{\circ}3$  (d.h. etwa gleich dem mittleren Fehler der Sternpositionen) im Winkelmaß verfälschen. Eine Möglichkeit besteht somit geozentrische Koordinaten für die Zentralstation (z.B. Berlin-Potsdam) zu bestimmen, und dies mit einer Genauigkeit - aus vielen Passagen - die einem mittleren Fehler von 5 bis 10 Metern entspricht.

Eine entsprechende Genauigkeit von  $n_{Gr}$  aus solchen Polarsatellitenbeobachtungen ist vielleicht auch möglich, aber sehr viele Beobachtungen auch von anderen Satelliten scheinen dazu nötig.

Es besteht immer der Wunsch, die Anzahl der Unbekannten in den Markowitzschen Gleichungen zu vermindern, um die Sicherheit der Resultate von  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $z_p$  erhöhen zu können. Was  $n_{Gr}$  betrifft, wäre es vielleicht möglich, diese Lotabweichungskomponente in Greenwich mit dem heutigen gravimetrischen und satellitengeodätischen Resultat terrestrisch unabhängig zu berechnen. Neulich ist auch vorgeschlagen worden, den Abstand einer Station von der Polarachse aus "laserranging" mittels der Retroreflektoren auf dem Monde mit sehr hoher Genauigkeit zu bestimmen (das Bendersche Prinzip)[2]. Würden solche Resultate erreicht, hätten wir statt elf Unbekannten, nur neun bei jeder Passage. Auf jeden Fall, mit einem Einlegeintervall der photographischen Platten (Film) der Kameras von zwei Minuten - was für die meisten Stationen heute doch möglich wäre, - erhielten wir für eine Agenarakete mit obenerwähnten Daten von jeder Passage und drei teilnehmenden Stationen (z.B. bei der bald gestarteten Zusammenarbeit zwischen Zimmerwalde, Berlin und Uppsala) leicht eine

Anzahl von zehn gut verteilten Beobachtungen (zwanzig Beobachtungs-gleichungen). Dies bedeutet rund zehn Überbestimmungen per Passage, was nicht besonders ungünstig ist.

Die Möglichkeit mit anderen Satellittypen und entsprechenden einfachen Beobachtungs- und Störungsmodellen die fM-Konstante und die kurzzeitigen Ephemeridenzeitkorrekturen bestimmen zu können, wird in einem später erscheinenden Aufsatz des Verfassers erläutert. Da wird auch die Frage der gemeinsamen Anwendung von Richtungs- und Distanzmessungen ("Laserranging") nach den Satelliten diskutiert.

#### REFERENZEN

- [1] MARKOWITZ, W: "Geocentric Coordinates from Lunar and Satellite Observations", Bull Géod N° 49, 1958
- [2] BENDER, K.: "Private discussion in Boulder 1966"
- [3] DAVIES, M.J.: "Planetary Equations and Atmospheric Perturbations". In Dynamics of Rockets and Satellites by G.V. Groves, N.H.P.C., Amsterdam 1965

## Klassische Triangulation

## und Satellitentriangulation

von Helmut WOLF (Bonn)

=====

**Abstract:** A combined solution for the simultaneous computation of terrestrial and satellite triangulation is proposed, consisting of 3 different stages: a) Computation of the two separate systems by itself, b) Analysis for discovering hidden deterministic-systematic effects, c) Combined computation of the unified system by eliminating these deterministic effects as far as their significance is proved. Thus, an answer can be found to the question of the possible mutual improvement of both triangulation systems when adjusting them together.

Die Tatsache, daß man die klassische Triangulation (nebst Trilateration) einerseits und die Satelliten-triangulation andererseits als zwei heterogene Verfahrensweisen auffassen kann, die formal einunddem-selben Ziele dienen - nämlich für eine Zahl von ausgewählten Erdoberflächenpunkten die gegenseitigen räumlichen Lagebeziehungen durch ihre Koordinaten auszudrücken -, hat schon frühzeitig [1], [2], [3], [4] zu dem Gedanken geführt, beide Triangulations-verfahren miteinander in Beziehung zu setzen. Im einzelnen geht es dabei darum,

- 1) die beiden Verfahren in ihren Ergebnissen miteinander zu vergleichen,
- 2) die dabei auftretenden Differenzen d nach ihren möglichen Ursachen zu analysieren,
- 3) unter Elimination aller als systematisch ("deterministisch") erkannten Einflüsse sodann ein Endergebnis maximaler Verlässlichkeit aus dem Zusammenwirken beider Systeme zu gewinnen.

Wenn eine solche Vereinigung auch ein wissenschaftliches Interesse beanspruchen und zu neuen Erkenntnissen führen soll (nicht nur im Sinne einer bloßen "Koordinaten-Produktion"), so ist dabei anzustreben, allen jenen Fehlerwirkungen auf die Spur zu kommen, die bislang aus der getrennten Behandlung der einzelnen Teilsysteme je für sich nur vermutet oder nur unzulänglich bestimmt werden konnten, wie das etwa – um ein Beispiel zu nennen – bei der großregionalen systematischen Seitenrefraktion seither der Fall war.

Wie das vorbenannte Ziel in theoretisch befriedigender Weise und auf einem praktisch gangbaren Weg erreicht werden kann, soll Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen sein.

### I. Die Grundlagen

Sind die Messungen  $L_k$  der klassischen terrestriischen Triangulation (Horizontalrichtungen bzw. -Winkel, Entferungen, Zenitdistanzen, astronomische Breiten, Längen, Azimute sowie [5] orthometrische Höhenunterschiede aus Nivellements und die Unterschiede der zugehörigen Geoidabstände) im Vektor  $l_k$  zusammengefaßt, wozu die Kovarianzmatrix  $Q_k$  und der Verbesserungsvektor  $v_k$  gehören, und ist  $l_s$  der entsprechende Vektor für die auf die Satelliten bezogenen Beobachtungswerte (photogrammetrische Bildkoor-

dinaten, bzw. die Richtungsparameter für die Visuren zum Satelliten, Entfernungen, Entfernungsunterschiede, Zeitwerte, Koordinaten der Anhaltssterne), wozu entsprechend  $Q_s$  und  $v_s$  gehören, so ist - im Sinne der seitherigen Verfahrensweise - durch  $v_k^T Q_k^{-1} v_k = \text{Min}$  das Prinzip der geodätischen Netzberechnung und durch  $v_s^T Q_s^{-1} v_s = \text{Min}$  das Prinzip der Satellitennetzberechnung fixiert.

1967 wurde vom Verf. der Vorschlag unterbreitet [6], eine gemeinsame Berechnung von klassischer und Satellitentriangulation entsprechend

$$[v_k^T, v_s^T] \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & Q_s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_k \\ v_s \end{bmatrix} = \text{Min} \quad (1)$$

zu bewirken. (Von einer gemeinschaftlichen Teilmatrix  $Q_{k,s}$  zwischen  $l_k$  und  $l_s$  kann in (1) aus naheliegenden Gründen abgesehen werden, doch sollen in  $Q_k$  und  $Q_s$  alle eventuellen Auto-Kovarianzen mitenthalten sein.)

Es beinhaltet dieser Ansatz (1) sowohl die Möglichkeit, daß die terrestrische Triangulation durch die Satellitentriangulation eine stützende Wirkung erfährt, wie auch - umgekehrt - die andere Möglichkeit, daß aus bekannten terrestrischen Lagebeziehungen eine Festigung des Satellitennetzes gewonnen oder daß mittels der terrestrischen Triangulation auf das Vorhandensein von gewissen systematischen Fehlerwirkungen innerhalb des Satellitensystems geschlossen werden kann, - ein hinreichendes Maß an Signifikanz in den beschreibenden Parametern vorausgesetzt.

## II. Die beschreibenden Parameter

Wir wollen die als Unbekannten zu bestimmenden Parametergrößen unterteilen

- a) in eine Gruppe von "Hauptunbekannten", vorwiegend geometrischen Charakters, wie sie seither zur Darstellung der obengenannten Triangulationssysteme benutzt worden sind, und
- b) in eine Gruppe von "Nebenunbekannten", welche die - als signifikant erkannten - deterministischen Anteile von systematischen Fehlerwirkungen beschreiben sollen.

### a) Die "Haupt-Unbekannten"

Hierzu zählen:

a1) auf der Seite der klassischen Triangulation: die dreidimensionalen Koordinaten aller trigonometrischen Punkte, soweit sie zugleich auch Satelliten-Beobachtungsstationen sind, zusammengefaßt im Vektor  $y$ , die Koordinaten  $x_1$  aller übrigen Punkte, die Orientierungsunbekannten  $x_2$  für die gemessenen Richtungssätze, die Refraktionsunbekannten  $x_3$  für die Zenitdistanzen, die Richtungsparameter  $x_4$  der natürlichen Lotrichtung in allen Punkten,

a2) auf der Seite der Satelliten-Triangulation: die Koordinaten  $y$  der Bodenstationen, die Bestimmungsstücke  $z_1$  der Satelliten-Bahnkurven (z.B. die Koeffizienten für den räumlichen polynomialem Glättungsansatz, vgl. [7]), die Elemente  $z_2$  für die innere und äußere Orientierung der Aufnahmekammern, die Koordinaten  $z_3$  für den Massenschwerpunkt der Erde, nach Dr. ARNOLD [3] auch deutbar als Translationsvektor zur Verschiebung des zunächst als willkürlich angenommenen Koordinatennullpunktes in den Massenschwerpunkt ( $z_3$  kommt indessen nur bei langen Bahn-

-Bogen in Frage).

b) Die "Neben-Unbekannten"

Sie verbleiben nur dann in der Berechnung, bzw. werden nur dann in die Rechnung einbezogen, wenn ihre Signifikanz eindeutig als gesichert angenommen werden kann. Es zählen hierzu

b1) auf der Seite der klassischen Triangulation: unbekannte restliche Maßstabsabweichungen  $x_1^*$ , bezogen auf nationale Teilsysteme oder auf einzelne Meßinstrument-Typen, unbekannte restliche Orientierungsfehler  $x_2^*$ , z.B. als systematische Fehler von Laplace-Azimuten, wie von Prof. ÖLANDER [8] für den Bereich des finnischen Landesnetzes nachgewiesen, bezogen auf einzelne nationale Teilnetze oder auf bestimmte Instrumenten-Typen und Beobachtungsmethoden, auszudrücken durch die Elemente einer dreidimensionalen Rotationsmatrix [9], sodann systematisch-großregionale Seitenrefraktionseinflüsse mit ihren Komponenten  $x_3^*$  [10], getrennt nach orographisch-meteorologisch homogenen Teilgebieten;

b2) auf der Seite der Satelliten-Triangulation: bei der photographischen Richtungsmethode die systematischen Fehler  $z_1^*$  wegen restlicher Komparator-, Verzeichnungs- und Filmverzugsfehler sowie wegen Refraktionsresten, zeitlicher Änderungen der äußeren Orientierung während der Aufnahme, systematische Zeitfehler und Sternkatalogfehler (z.B. in Abhängigkeit von Rektaszension und Deklination); bei den Doppler-Messungen die systematischen Fehler  $z_2^*$  wegen zeitlicher Drift, wegen restlicher Frequenzeichfehler und wegen systematischer Abweichungen der Troposphären-Refraktion, und bei den Laser-Entfernungsmessungen wegen einer eventuellen Additionskonstanten  $z_3^*$  u.a.m.

### III. Die Vorgehensweise

Das Problem liegt in der Behandlung der deterministisch-systematischen Effekte

$$[x_1^{*T}, x_2^{*T}, x_3^{*T}] = x^{*T} \quad (2)$$

$$\text{und } [z_1^{*T}, z_2^{*T}, z_3^{*T}] = z^{*T},$$

von deren Signifikanz es abhängig zu machen ist, inwieweit sie überhaupt in der Rechnung verbleiben oder darin einbezogen werden sollen. Zu diesem Zweck unterteilen wir die Vektoren  $x^*$  und  $z^*$  derart in 2 Teile  $x_B$  und  $x_C$ , bzw.  $z_B$  und  $z_C$  mit

$$x^{*T} = [x_B^T, x_C^T], \text{ bzw. } z^{*T} = [z_B^T, z_C^T], \quad (3)$$

daß wir für die mögliche Existenz von  $x_B$  und  $z_B$  schon eine Reihe von Erfahrungstatsachen sprechen lassen können, während für  $x_C$  und  $z_C$  a priori noch keinerlei Angaben gemacht werden können: Erst durch eine eingehende Regressionsanalyse der Reste  $d$ ,  $v_k$ ,  $v_s$  soll eine Information darüber gefunden werden können, welche der systematischen Einflüsse  $x^*$  bzw.  $z^*$  in den  $x_C$  und  $z_C$  eventuell mitzuführen sind.

#### a) Die getrennte Berechnung der Teilsysteme

Aus den linearisierten Relationen, z.B. für die klassische Triangulation

$$l_k + v_k = l_k^0 + A_k x_A + B_k x_B + C_k x_C + R_k y,$$

worin  $l_k^0$  die aus den Näherungswerten der Unbekannten errechenbaren Werte der  $L_k$  darstellen, erhält man,

wenn

$$\mathbf{x}_A^T = [x_1^T, x_2^T, x_3^T, x_4^T]$$

$$\text{und } l_k^0 - l_k = w_k ,$$

die folgenden Systeme von Verbesserungsgleichungen:

$$v_k = A_k x_A + B_k x_B + R_k y + (w_k + C_k x_C) \quad (4)$$

$$\text{bzw. } v_s = A_s z_A + B_s z_B + R_s y + (w_s + C_s z_C) . \quad (5)$$

Wir setzen nun vorerst  $x_C = 0$ ,  $z_C = 0$  und bezeichnen die hierdurch bestimmten Verbesserungs- und Parameterwerte mit  $x_A^0, x_B^0, y_k^0, y_s^0, z_A^0, z_B^0, v_k^0, v_s^0$ . Dann führt (1) bekanntlich mit

$$\begin{aligned} A_k^T Q_k^{-1} A_k &= K_{AA}, \quad A_k^T Q_k^{-1} B_k = K_{AB}, \quad \dots, \quad A_k^T Q_k^{-1} w_k = \\ &= k_A, \quad \dots, \quad w_k^T Q_k^{-1} w_k = k_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_s^T Q_s^{-1} A_s &= S_{AA}, \quad A_s^T Q_s^{-1} B_s = S_{AB}, \quad \dots, \quad A_s^T Q_s^{-1} w_s = \\ &= s_A, \quad \dots, \quad w_s^T Q_s^{-1} w_s = s_s \end{aligned}$$

zur Aufstellung der Teilsysteme

$$K_{AA}x_A^0 + K_{AB}x_B^0 + K_{AR}y_k^0 + k_A = 0$$

$$\dots + K_{BB}x_B^0 + K_{BR}y_k^0 + k_B = 0$$

$$\dots + K_{RR}y_k^0 + k_R = 0$$

sowie  $\dots + k_k = v_k^{0T} Q_k^{-1} v_k^0$

(6)

$$S_{AA}z_A^0 + S_{AB}z_B^0 + S_{AR}y_s^0 + s_A = 0$$

$$\dots + S_{BB}z_B^0 + S_{BR}y_s^0 + s_B = 0$$

$$\dots + S_{RR}y_s^0 + s_R = 0$$

sowie  $\dots + s_s = v_s^{0T} Q_s^{-1} v_s^0$

Verfügt man über so viele Elemente in den  $x_A^0$  und  $z_A^0$ , daß gerade die betr. Koeffizientendeterminanten von (6) nicht verschwinden, d.h. gleicht man das terrestrische und das Satellitensystem je für sich (mit den Freiheitsgraden  $f_k^0$  und  $f_s^0$ ) zwangfrei aus, so gewinnt man die Möglichkeit, zu allen in (6) enthaltenen Unbekannten die zugehörigen mittleren Fehler  $m^0$  zu berechnen.

Die Abweichungen der Werte

$$v_k^{0T} Q_k^{-1} v_k^0 / f_k^0 = (m_k^0)^2 \quad \text{und}$$

(7)

$$v_s^{0T} Q_s^{-1} v_s^0 / f_s^0 = (m_s^0)^2$$

vom Wert 1 zeigen in einem gewissen Sinne bereits an, ob und in welchem Maße (nämlich gegenüber den a pri-

ori bei der Bildung von  $Q_k$  und  $Q_s$  getroffenen Vorstellungen) in den  $v_k^o$  bzw.  $v_s^o$  noch spürbare "deterministische" Effekte ( $c_k x_C$ ) bzw. ( $c_s z_C$ ) zu erwarten sind.

Erst wenn diese signifikant bestimmt und aus den  $v$  eliminiert worden sind, darf man die  $(m_k^o)^2$  und  $(m_s^o)^2$  dazu benutzen, um für die Zwecke der vereinigten Gesamtausgleichung beider Systeme dann die  $Q_k$  und  $Q_s$  (auf multiplikative Weise) noch zu verbessern.

### c) Untersuchung

#### auf systematisch-deterministische Anteile

Unter den verschiedenen Möglichkeiten bieten sich, vor der Vornahme weiterer Verfeinerungen, im wesentlichen die folgenden an:

1) Bildet man für jedes Element von  $x_B$  und  $z_B$  die Student-Koeffizienten

$$t_{x_B} = x_B / m_{x_B}, \text{ bzw. } t_{z_B} = z_B / m_{z_B}, \quad (8)$$

wofür zunächst nur die Werte  $x_B^o$ ,  $z_B^o$ ,  $m_{x_B}^o$ ,  $m_{z_B}^o$  zur Verfügung stehen, so gewinnt man, wie bekannt [11], eine unmittelbare Aussage über den Grad der Signifikanz in den einzelnen  $x_B$  und  $z_B$ . (Die Berechnung ist später mit den definitiven  $x_B$ ,  $z_B$  zu wiederholen.)

2) Bildet man die Differenzen

$$d = y_k^o - y_s^o, \quad (9)$$

so kann gleichermaßen aus

$$t_d = d/m_d \quad (10)$$

auf die statistische Bedeutsamkeit der  $d$  an Hand ihrer Signifikanz geschlossen werden.

3) Als nächstes sind die Wertereihen der

$$v_k^o = A_k x_A^o + B_k x_B^o + R_k y_k^o + w_k$$

$$v_s^o = A_s z_A^o + B_s z_B^o + R_s y_s^o + w_s$$

daraufhin zu untersuchen, ob sich in ihnen noch Abhängigkeiten (Regressionen) von den  $x_C$  bzw.  $z_C$  ver- raten, indem nach (4) und (5)

$$v_k^o = v_k - C_k x_C = f_k(x_C) \quad (11)$$

$$v_s^o = v_s - C_s z_C = f_s(z_C) \quad (12)$$

In erster Annäherung zeigen sich diese  $f_k(x_C)$  bzw.  $f_s(z_C)$  schon dann, wenn man die  $v_k^o$  über den  $x_C$ , bzw. die  $v_s^o$  über den  $z_C$  graphisch aufträgt, - sofern man nur hinsichtlich der ins Spiel gelangenden  $x_C$  und  $z_C$  eine aus dem besonderen Sachverhalt sich ergebende Vorstellung besitzt. Dann sind die (11) und (12) durch approximierende Funktionen auszudrücken, deren Koeffizienten die mit  $x_C$  bzw.  $z_C$  bezeichneten Unbekannten sind.

Weitere Prüfmöglichkeiten wären auch über den Chi-quadrat- und den F-Test [12] denkbar oder nach einer Fourier-Approximation mittels (quadratischer) Leistungs-Spektren, vgl. auch Prof. BAARDA [13].

Wie bereits erwähnt, ist ein iteratives Vorgehen hierbei am Platze, indem einige der Tests, so (8),

(11), (12), ihren wahren Charakter erst zeigen werden, wenn man die aus der Vereinigung beider Triangulationssysteme hervorgehenden  $v$  (nicht die  $v^0$ ) verwendet, weil dann erst das Maximum aller Informationen vorliegt.

d) Vereinigte Gesamtausgleichung unter Elimination  
der deterministisch-systematischen Effekte

Hat man nach c), u.U. auf iterative Weise, über die als signifikant anzunehmenden  $x_B$ ,  $x_C$ ,  $z_B$ ,  $z_C$  entschieden, so erhält man an Stelle von (6) die definitiven Teilsysteme

$$K_{AA}x_A + K_{AB}x_B + K_{Ac}x_C + K_{AR}y + k_A = 0$$

$$\dots + K_{BB}x_B + K_{BC}x_C + K_{BR}y + k_B = 0$$

$$\dots + K_{CC}x_C + K_{CR}y + k_C = 0$$

$$\dots + K_{RR}y + k_R = 0$$

sowie  $\dots + k_k = v_k^T Q_k^{-1} v_k$

$$S_{AA}z_A + S_{AB}z_B + S_{AC}z_C + S_{AR}y + s_A = 0$$

$$\dots + S_{BB}z_B + S_{BC}z_C + S_{BR}y + s_B = 0$$

$$\dots + S_{CC}z_C + S_{CR}y + s_C = 0$$

$$\dots + S_{RR}y + s_R = 0$$

sowie  $\dots + s_s = v_s^T Q_s^{-1} v_s$

Die Elimination von  $x_A, x_B, x_C$ , bzw.  $z_A, z_B, z_C$  liefert reduzierte Teilsysteme von der Form

$$(K_{RR} \cdot III) y + (k_R \cdot III) = 0$$

$$\text{sowie } \dots + (k_k \cdot III) = v_k^T Q_k^{-1} v_k$$

$$(S_{RR} \cdot III) y + (s_R \cdot III) = 0$$

$$\text{sowie } \dots + (s_s \cdot III) = v_s^T Q_s^{-1} v_s$$

Ihre additive Vereinigung liefert das Hauptsystem

$$\{(K_{RR} \cdot III) + (S_{RR} \cdot III)\} y + \{(k_R \cdot III) + (s_R \cdot III)\} = 0 \quad (13)$$

sowie

$$\dots + \{(k_k \cdot III) + (s_s \cdot III)\} = v_k^T Q_k^{-1} v_k + v_s^T Q_s^{-1} v_s = v^T Q^{-1} v$$

Die Auflösung von (13) liefert die gesuchten Koordinaten  $y$  der Satellitenbeobachtungsstationen, nachdem man zuvor an Hand von (7) die  $Q$ -Matrizen verbessert, bzw. die Theorie von KUBIK [14] angewendet hat. Der Wert von

$$v^T Q^{-1} v / (f_k + f_s) = m_o^2 \quad (14)$$

darf dann nicht mehr signifikant vom Wert 1 abweichen.

#### IV. Schluss

Der wichtigste Schritt in der dargestellten gemeinsamen Behandlung von klassischer und Satellitentriangulation liegt in der unter IIb) dargestellten Ana-

lyse. Ihre gewissenhafte Durchführung bildet die Grundlage zur Aufdeckung und zur Kenntnis verborgener systematischer Fehlereinflüsse, ohne deren Elimination keine befriedigende Koordinatenberechnung für die an den Triangulationssystemen beteiligten Punkte durchgeführt werden kann.

Zugleich kann hierbei aus dem Vergleich der  $y_k^o$  mit den  $y$  eine Antwort auf die sehr aktuelle Frage gefunden werden, wie groß dem die stützende Wirkung der Satellitentriangulation auf die klassische Triangulation ist und wie die verbessernden Wirkungen ( $y_k^o - y$ ) vom Abstand  $a$  zwischen zwei Satellitenbeobachtungsstationen abhängen, so daß man eine Vorstellung davon gewinnt, bei welcher kleinsten Entfernung  $a_1$  der Betrag von ( $y_k^o - y$ ) so gering ist, daß man die beiden Stationen mit ihren Satellitenbeobachtungen einfach aufeinander zentrieren, d.h. die terrestrische Bestimmung als fehlerfrei gegenüber der Bestimmung über die Satelliten annehmen kann.

Umgekehrt liefern die Werte von ( $y_s^o - y$ ) eine Vorstellung davon, von welcher größten ("kritischen") Entfernung  $a_2$  an das terrestrische Netz (praktisch) keinen verbessernden Einfluß mehr auf das Satellennetz auszuüben vermag.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß - verlässliche und moderne Messungen vorausgesetzt - von allen terrestrisch-geodätischen Konfigurationen kein System eine so hohe innere Stabilität aufweist wie das flächige, allseitig ausgedehnte terrestrische Netz, das jedem Polygonzug gleicher Messungsgüte überlegen ist. Aus gleichem Grunde dürfte die hier vorgeschlagene Vorgehensweise auch der verschiedentlich vorgeschlagenen [15] Prozedur vorzuziehen sein, bei der aus bestehenden Triangulationen einzelne ausgewählte

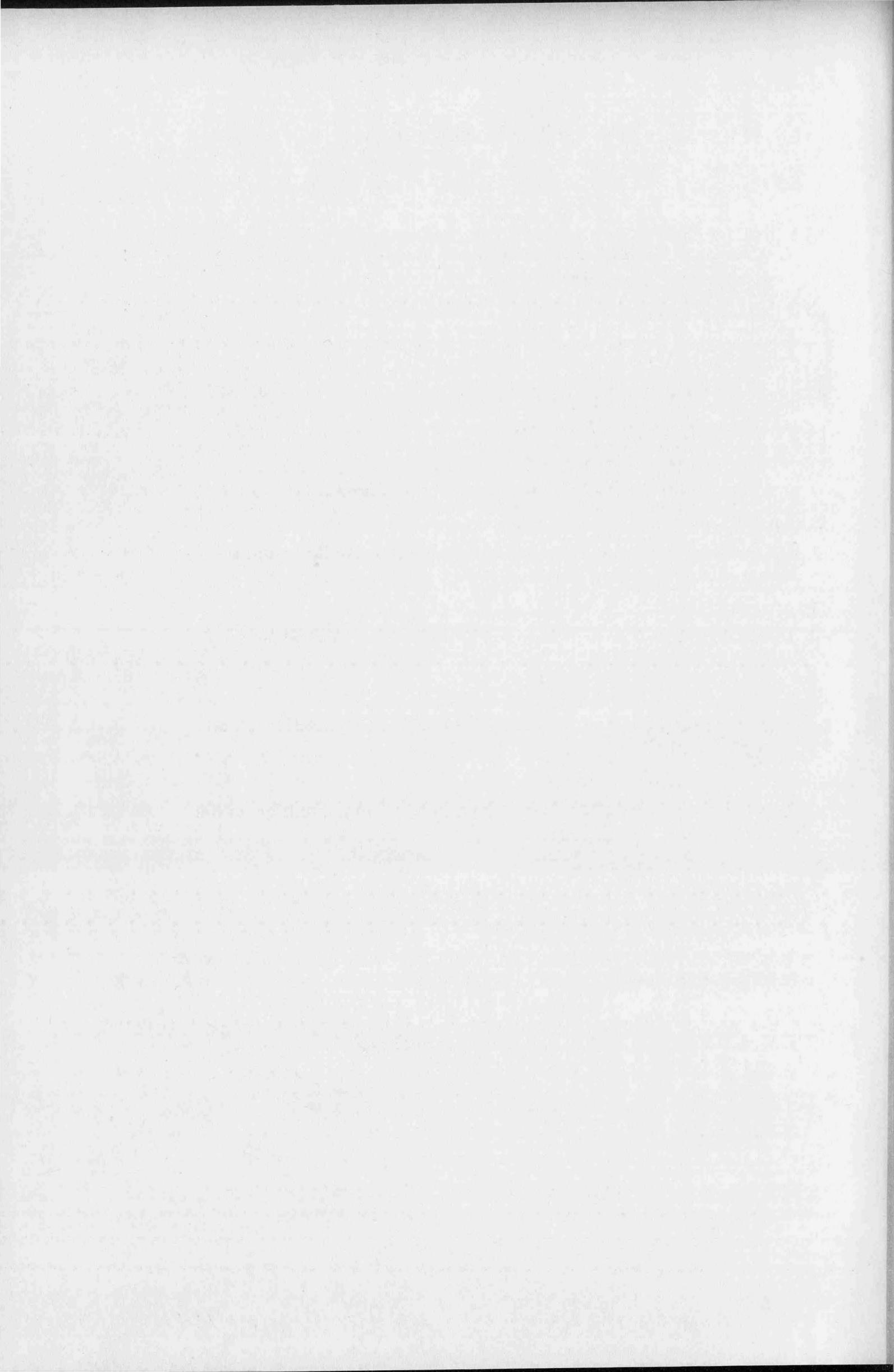
Entfernungen, Azimute oder Koordinatenunterschiede entnommen und als korrelierte Beobachtungen in die Ausgleichung des Satelliten-Netzes eingeführt werden.

### L i t e r a t u r:

---

- [1] WOLF, H.: Gedanken und Vorschläge zur Inangriffnahme der Ausgleichung des europäischen Dreiecksnetzes. Ass. Int. Geod. Bericht über d. Neuausgl. d. eur. Hptdr.-Netzes. München 1963, S. 129 ff.
- [2] WOLF, H.: Possibilities for the Joint Adjustment of Satellite and Terrestrial Triangulation and Trilateration Network. - Veröfftl. DGK, Reihe B, Heft 153. München 1967, S. 93 ff.
- [3] ARNOLD, K.: Anschluß von Triangulationen an Systeme der Satellitengeodäsie. - Int. Konf. üb. Meth. u. Instr. d. geod. Netzverdicht., Section I/B. Budapest 1970
- [4] RINNER, K.: Studie über europäische Netze, welche mit Hilfe von Satelliten gebildet werden. - Int. Konf. üb. Meth. u. Instr. d. geod. Netzverdicht., Section I/B. Budapest 1970
- [5] WOLF, H.: Rigorous Computation of the European Traverse Including the Accompanying Strip of Triangulation. - Veröfftl. DGK, Reihe B, Heft 143. München 1967, S. 129 ff, insbes. 138
- [6] wie [2], Seite 96
- [7] WOLF, H.: Computation of Satellite Triangulation by Spatial Fitting of the Orbit. Veröfftl. DGK, Reihe B, Heft 153. München 1967, S. 75
- [8] ÖLANDER, V.R.: Vergleichende Azimutbeobachtungen mit vier Instrumenten. Veröfftl. Finn. Geod. Inst. No 52. Helsinki 1960
- [9] WOLF, H.: Geometric Connection and Re-orientation of three-dimensional Triangulation Nets. Bull. Géodés. 1963, S. 165 ff

- [10] FÖRSTER, G./SCHÜTZ, G.: Systematische Fehler in geodätischen Netzen. Veröfftl. Preuss. Geod. Inst. Potsdam. N.F.101. Potsdam 1929
- [11] WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn 1968, S.509 ff.
- [12] BAARDA, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherl. Geod. Comm. Vol.2, No 5. Delft 1968
- [13] KUBIK, K.: Variance Estimation or an Extended least Squares Method. ITC. Delft 1969
- [14] KRAKIWSKY, E.J.: Sequential Least Squares Adjustment of Satellite Triangulation and Trilateration in Combination with Terrestrial Data. Departm. Geod. Sc., Report No 114. Columbus (Ohio) 1968



## INHALTSVERZEICHNIS

## Beiträge des I. Geodätischen Institutes der TH. Graz:

1) HUBENY K.:	Günstigste Aufnahmeanordnungen in der Industriephoto-	133
	grammetrie	• • • • • • • • •
2) PFLÜGER W.:	Fehlerhafte Koordinatenmessungen durch Ungenauigkeiten in den	141
	Zahnradübertragungen	• • • • • • • • •
ISOTOV A.A., Moskau:	Über die Reduktion astronomischer Beobachtungen zum unveränder-	147
	lichen Erdpol	• • • • • • • • •
KAMELA C., Warszawa:	Neue Reduktionsmodifizierungen der beobachteten Schwerewerte für	159
	Geoidbestimmung	• • • • • • • • •
KAUTZLEBEN H., Potsdam:	Zur statistischen Beschreibung eines skalaren Feldes auf der	163
	Kugeloberfläche	• • • • • • • • •
KNEISSL M., München:	Karl Ledersteger zum siebzigsten Geburtstag am	173
	11. November 1970	• • • • • • • • •
LÖSCHNER F., Aachen:	Geodätische Deformationsmessungen an der Oleftalsperre	175
MORITZ H., Graz:	Die Methode der kleinsten Quadrate in der physikalischen	183
	Geodäsie	• • • • • • • • •
MUELLER I.I.,		
REILLY J.P.,		
SCHWARZ C.R.,		
BLAHA G., Columbus:	Geos-I Secor Observations in the Pacific	195
PESCHEL H., Dresden:	Kontinentale Höhennetze und Meeresniveau	209
PICK M.		
PICHA J., Praha:	The Mean Density of the Earth Determined from the Vertical	217
	Gradient of Gravity	• • • • • • •
RAMSAYER K., Stuttgart:	Übertragung astronomischer Azimute in der dreidimensionalen	
	Geodäsie	• • • • • • •
		223

## Seite

RINNER K., Graz: Studie über die Stützung von europäischen Netzen, mit Hilfe von Messungen nach Satelliten . . . . .	235
SCHMID H., Wien: Die Landesvermessung im Rückblick, Einblick und im Ausblick .	251
SIGL R., München: Über einige Studien zur dynamischen Nutzung künstlicher Erdsatelliten . . . . .	263
TARCZY - HORNOCH A., Sopron: Über die Ausgleichung der Streckenvierecke und Strecken- einschnitte auf der Sphäre nach der Methode der bedingten Beobachtungen . . . . .	275
TENGSTRÖM E., Uppsala: Bestimmung geocentrischer Koordinaten (von Erdflächenpunkten) aus Satellitenbeobachtungen . . . . .	283
WOLF H., Bonn: Klassische Triangulation und Satellitentriangulation . . . . .	299