Zwei Modelle für geodätische Linien

Inge Nesbö [1]

[1] *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der Technischen Hochschule Trondheim, Norwegen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **63** (2), S. 69–72

1975

Dank:

Die Computerexperimente wurden im Jahre 1972 an der damaligen IBM-7040-Anlage des Institutes für Numerische Mathematik der Technischen Hochschule in Wien durchgeführt. Die Zeichnungen wurden auf Grund der numerischen Ergebnisse mit Hilfe eines von der Fa. WANG freundlicherweise bereitgestellten Systems 2200, bestehend u. a. aus Zentraleinheit und Digital-Flatbed-Plotter, erstellt.

Zwei Modelle für geodätische Linien

Von Universitätsstipendiat *Inge Nesbo*, Trondheim

Summary

Using vector-algebra and geocentric coordinates, geodesic lines can be computed as arcs of circles. For lengths less than 2000 km the relative difference, when compared to the solution by Bessel-Helmert, is 10^{-8}.

Vorbemerkung

Während der Arbeit, ein Programm für die Berechnung von Kontinentalsockelgrenzen zu entwerfen, wurde es notwendig, einen Algorithmus für die zweite Hauptaufgabe zu schaffen.

Die Lösungen, die man in der Literatur findet, erschienen schwer zu programmieren, und daher wurde versucht, die geodätischen Linien als Kreisbogen zu berechnen, und mit Erfolg.

Es gibt viele Lösungen für diese Aufgabe. Die Mehrzahl von ihnen sind auf Reihenentwicklungen aufgebaut. Die Lösungsmöglichkeiten waren früher dadurch begrenzt, daß für ihre Auswertung nur logarithmische und trigonometrische Tafeln mit begrenzter Genauigkeit verfügbar waren.

Heute hat man Rechenanlagen, die mit 15 Ziffern oder mehr arbeiten, und daher wird es möglich, geozentrische Koordinaten mit Millimetergenauigkeit zu benutzen. Wir bekommen dann Lösungen, die für das ganze Ellipsoid analytisch sind. Lösungen, die auf den Legendreschen Reihen aufgebaut sind, haben den Mangel, daß sie im Polpunkt singulär werden.

Vereinfachung des mathematischen Modells

In Abbildung 1 sind A und B zwei Punkte auf dem Erdellipsoid, und man soll die geodätische Linie zwischen A und B berechnen. S ist ein Punkt in der Nähe des Mittelpunktes aller Krümmungszentren, die zu den zwei Normalschnitten zwischen A und B gehören. Die durch A, B und S gebildete Ebene erzeugt einen Ellipsoidschnitt, der zwischen den zwei Normalschnitten von A und B liegt. Dieser Schnittbogen wird dann eine gute Annäherung für die geodätische Linie sein.

Mit dem Winkel γ und einem Mittelwert für den Krümmungshalbmesser kann man eine gute Annäherung für die Länge dieses Schnittes zwischen A und B finden, wenn γ klein ist. Man kann am besten feststellen, wie gut die Annäherung ist, wenn man die Ergebnisse mit den Ergebnissen eines Modells bekannter Genauigkeit vergleicht.

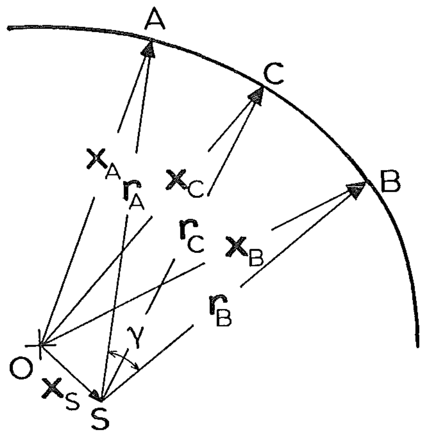

Abb. 1

Zu einem Punkt mit geographischen Koordinaten (B, L) gehört der geozentrische Vektor:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos\beta \cos L \\ \cos\beta \sin L \\ K \sin\beta \end{bmatrix}$$

$K = b/a$ $(= 296/297$ für das internationale Ellipsoid)
$a =$ großer Halbmesser des Ellipsoids
$\operatorname{tg}\beta = K \operatorname{tg} B$

Der Punkt C in Abb. 1 ist der Durchstoßpunkt der Halbierungslinie des Winkels zwischen den Vektoren $\mathbf{X}_A$ und $\mathbf{X}_B$ mit dem Ellipsoid. Man wählt den Punkt S so, daß er auf der Normalen durch C liegt und die Strecke $[\mathbf{r}_c]$ Krümmungshalbmesser für einen Normalschnittbogen ist, der in C das Azimut A_c hat.

Man erhält dann den geozentrischen Vektor für S:

$$\mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos\beta_c \cos L_c (1 - 1/T) \\ \cos\beta_c \sin L_c (1 - 1/T) \\ \sin\beta_c (K - 1/[KT]) \end{bmatrix}$$

$$T = 1 + (K^{-2} - 1) \cos^2 B_c \cos^2 A_c$$

Man muß dann erst einen Vektor mit Richtung nach C finden:

$$\mathbf{Y}_c = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{X}_A}{|\mathbf{X}_A|} + \frac{\mathbf{X}_B}{|\mathbf{X}_B|}$$

Aus diesem Vektor kann man die trigonometrische Funktion für die reduzierte Breite β_c, für die Breite B_c und für die Länge L_c am besten so erhalten:

$$\begin{aligned}
\sin \beta_c &= (Y_3/K) \,/\, (Y^2{}_1 + Y^2{}_2 + Y^2{}_3/K^2)^{1/2} \\
\cos \beta_c &= (Y^2{}_1 + Y^2{}_2)^{1/2} \,/\, (Y^2{}_1 + Y^2{}_2 + Y^2{}_3/K^2)^{1/2} \\
\sin B_c &= (Y_3/K^2) \,/\, (Y^2{}_1 + Y^2{}_2 + Y^2{}_3/K^4)^{1/2} \\
\cos B_c &= (Y^2{}_1 + Y^2{}_2)^{1/2} \,/\, (Y^2{}_1 + Y^2{}_2 + Y^2{}_3/K^4)^{1/2} \\
\sin L_c &= Y_2 \,/\, (Y^2{}_1 + Y^2{}_2)^{1/2} \\
\cos L_c &= Y_1 \,/\, (Y^2{}_1 + Y^2{}_2)^{1/2}
\end{aligned}$$

Man erhält das Azimut in C für einen Vertikalschnittbogen nach A, wenn man den Vektor $\mathbf{X}_{CA}$ auf die Einheitsvektoren $\mathbf{C}_B$ und $\mathbf{C}_L$ projiziert.

Die Vektoren $\mathbf{C}_B$ und $\mathbf{C}_L$ liegen in der Tangentialebene des Ellipsoids im Punkt C, mit $\mathbf{C}_B$ in der Meridianrichtung und mit $\mathbf{C}_L$ quer dazu.

$$\mathbf{C}_B = \begin{bmatrix} -\sin B_c \cos L_c \\ -\sin B_c \sin L_c \\ \cos B_c \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} -\sin L_c \\ \cos L_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Punkt C liegt nicht in der durch A, B und S gebildeten Ebene, außer wenn A und B auf demselben Meridian gelegen sind, und daher bekommt man einen besseren Wert für das mittlere Azimut des Ellipsoidschnitts, wenn man anstatt $\mathbf{X}_{CA}$ den Vektor $\mathbf{X}_{BA}$ benützt:

$$\begin{aligned}
S_B &= \mathbf{X}_{BA} \,.\, \mathbf{C}_B \\
S_L &= \mathbf{X}_{BA} \,.\, \mathbf{C}_L \\
\cos A_c &= S_B \,/\, (S^2{}_B + S^2{}_L)^{1/2}
\end{aligned}$$

Nun kann man die Vektoren $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ und $\mathbf{r}_C$ in Abb. 1 finden und den Winkel zwischen $\mathbf{r}_A$ und $\mathbf{r}_B$:

$$\sin \gamma = \left| \frac{\mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_A|} \cdot \frac{\mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_B|} \right|$$

Als letzter Teil des mathematischen Modells wird die Simpson-Formel verwendet:

$$L_{AB} = \gamma \,(|\mathbf{r}_A| + 4\,|\mathbf{r}_C| + |\mathbf{r}_B|) \,/\, 6$$

Ergebnisse

Um die Genauigkeit zu untersuchen, wurde ein Kreis auf der Europakarte gezeichnet, mit dem Mittelpunkt auf der Nordwestspitze von Norwegen. Sein Halbmesser ist 800 km; das bedeutet, daß der Kreisbogen von Lofoten über England zur Grenze zwischen Deutschland und Dänemark verläuft. Mit dieser Methode und mit der Bessel-Helmertschen Lösung wurden 9 Halbmesser in diesem Kreis berechnet. Die Differenzen sind vom Azimut abhängig und betragen 1 bis 3 mm bei diesen Entfernungen von 800 km.

Für die Rechnung wurde eine UNIVAC 1108 verwendet, die für „double precision" etwa 18 Dezimalziffern hat.

Ein Modell für größere Entfernungen

Bei einer Länge von 1800 km beträgt die Differenz zwischen der Bessel-Helmertschen Lösung und dieser Methode etwa 5 cm. Wenn man damit nicht zufrieden ist, kann man das Modell verbessern, indem man die Entfernung in kleinere Teilstrecken zerlegt.

In Abb. 2 ist C' ein Punkt auf der Sehne zwischen A und B. Wenn man von C' entlang der Ellipsoidnormalen bis an die Fläche geht, kommt man zu einem Punkt C.

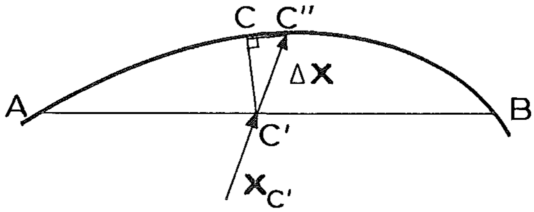

Abb. 2

C ist nahe der geodätischen Linie zwischen A und B gelegen. Man wählt C' so, daß er der Mittelpunkt zwischen A und B ist (Abb. 2):

$$\mathbf{X}_{C'} = (\mathbf{X}_A + \mathbf{X}_B) / 2$$

Wenn man $\mathbf{X}_{C'}$ verlängert, kommt man zu C'' auf dem Ellipsoid, und man kann $\mathbf{X}_{C''}$ ausgehend von $\mathbf{X}_{C'}$ entwickeln. Man kennt die Ellipsoidnormale in C nicht, aber man kann sie ohne großen Fehler durch die Ellipsoidnormale $\mathbf{n}_{C''}$ ersetzen:

$$\mathbf{n}_{C''} = \begin{bmatrix} \cos B_{C''} \cos L_{C''} \\ \cos B_{C''} \sin L_{C''} \\ \sin B_{C''} \end{bmatrix}$$

Und so kann man eine gute Annäherung für den Punkt C finden:

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_{C''} - \mathbf{X}_{C'}$$

$$\mathbf{X}_C \approx \mathbf{X}_{C'} + (\Delta\mathbf{X} \, . \, \mathbf{n}_{C''})\, \mathbf{n}_{C''}$$

Nun kann das erste Modell benutzt werden, um die Längen $A—C$ und $C—B$ zu finden.

Es wurde versucht, eine Strecke von 1600 km Länge (zwischen Berlin und Moskau) zu berechnen. Die größte Distanz zwischen der Sehne AB und dem Ellipsoid beträgt hier etwa 50 km, aber die berechnete Distanz weicht nur um 5 mm von dem Ergebnis der Bessel-Helmertschen Lösung ab.

Die Genauigkeit des Modells ist von der Breite und dem Azimut abhängig. Bis zu Längen von 2000 km bleibt der relative Fehler aber innerhalb 10^{-8}.

Die Lösung ist in FORTRAN mit einer Routine von 80 Linien programmiert und Teil eines größeren Programms für die Berechnung von Kontinentalsockelgrenzen.

Literatur

Bjerhammar, A.: Geodesi. Amquist & Wisells, Stockholm 1967.