

Paper-ID: VGI_196502



Eine neue Fehleraufteilung bei geschlossenen Polygonzügen

Hans Schmid ¹

¹ *Technische Hochschule, Wien IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **53** (1), S. 14–23

1965

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Schmid_VGI_196502,  
Title = {Eine neue Fehleraufteilung bei geschlossenen Polygonz\u00e4gen},  
Author = {Schmid, Hans},  
Journal = {{\u00}sterreichische Zeitschrift f{\u00}r Vermessungswesen},  
Pages = {14--23},  
Number = {1},  
Year = {1965},  
Volume = {53}  
}
```



Eine neue Fehleraufteilung bei geschlossenen Polygonzügen

Von *Hans Schmid*, Wien

1. Einleitung

In dieser Zeitschrift wurde im Heft 4, 49. Jahrgang 1961, eine neue Fehleraufteilung für lange Polygonzüge veröffentlicht. Eine Reihe von Mitteilungen sagt mir, daß die praktischen Ergebnisse, insbesondere bei Absteckungen, sehr zufriedenstellend sind. Der Vollständigkeit halber sollen nun die analogen Berechnungen für geschlossene Polygonzüge entwickelt werden, wiewohl diese in der Praxis für Absteckungsarbeiten sehr selten Verwendung finden werden. Der praktische Wert dieser Fehleraufteilung liegt vielmehr in der Tatsache begründet, daß eine systematische Fehleraufteilung beim Polygonzug — es wird bewußt der Ausdruck „Ausgleichung“ vermieden — nur durch Änderung der *gemessenen* Stücke erfolgen soll. Es ist genügend bekannt, daß bei der üblichen Fehleraufteilung in geschlossenen Polygonen, die Koordinatenwidersprüche proportional der Seitenlängen oder der Δx - bzw. Δy -Werte aufzuteilen, willkürlich Winkel- und Seitenänderungen entstehen müssen, die mit dem Messungsvorgang in keinem Zusammenhang stehen. Trotzdem es fast sicher ist, daß für die üblichen praktischen Belange die bisherige Methode weiterhin nicht verlassen werden wird, scheinen doch gewisse rechnerische Zusammenhänge betrachtenswert.

2. Fehleraufteilung bei geschlossenen Polygonzügen

Wird meine im Jahre 1961 veröffentlichte Fehleraufteilung für lange Polygonzüge verwendet, so sind beim ersten Schritt die Brechungswinkel gleichmäßig zu ändern, so daß der gesamte Querfehler eliminiert wird. Beim zweiten Schritt wird dann durch eine Maßstabsänderung der Längsfehler zum Verschwinden gebracht.

Beim geschlossenen Polygonzug bleibt eine Maßstabsänderung auf den totalen Zugsfehler ohne Wirkung, d. h. genauer gesagt, der Fehler ändert sich im selben Maßstab wie die Seiten und würde daher nur dann verschwinden, wenn der Polygonzug auf einen Punkt zusammenschrumpft, d. h. der Maßstabsfaktor zu Null würde. Die Maßstabsänderung ist daher als Mittel zur teilweisen Fehlerelimination auszuschießen.

Bei jeder Fehleraufteilung im Polygonzug wird der Fehlervektor in zwei zueinander senkrechte Richtungen zerlegt. Bei den üblichen Methoden sind dies etwa der Längen- und der Querfehler oder die Fehler in den Koordinatenrichtungen. Nunmehr läßt sich auch beim geschlossenen Polygonzug eine Zerlegung in zwei zueinander senkrechte Richtungen wie folgt durchführen. Verkleinert man die erste Hälfte der Brechungswinkel jeweils um den gleichen Betrag und vergrößert man die zweite Hälfte der Brechungswinkel jeweils um den gleichen Betrag und fügt die Wegvektoren, welche der End- bzw. der Anfangspunkt des geschlossenen Polygonzuges durch diese Winkeländerungen beschreibt, aneinander, so entsteht durch Verbindung des Anfangspunktes 1 mit dem Endpunkt 9' des letzten Vektors der erste Fehlervektor. Wir können ihn „Querfehlervektor“ nennen, da seine Richtung

tatsächlich durch die analoge Vorgangsweise wie in [1.] entstanden ist. Würde man die Vorzeichenfolge bei der Winkeländerung öfters ändern, so ändert sich die Fehlerrichtung und die Länge des Fehlervektors. In Abb. 1 ist ein Fehlervektor durch den gestrichelten Linienzug dargestellt, der durch positive Winkeländerung in den Punkten 2,3 und 8,9 und durch negative Winkeländerung in den übrigen Punkten entstanden ist. Wechselt man die Vorzeichen der Winkeländerungen, so ändert der Fehlervektor seine Richtung um 200° bei gleichbleibender Länge. Man wird nun

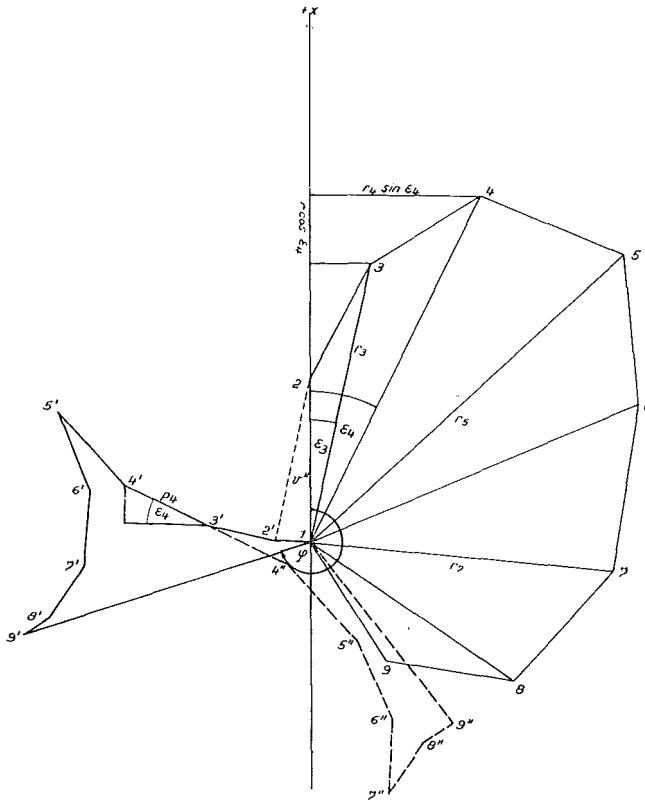


Abb. 1

bei der praktischen Fehleraufteilung die Winkel so ändern, daß erstens positive und negative Änderungen gleich oft vorkommen, da die Winkelsumme ja erhalten bleiben muß und zweitens die Vektorsumme den längsten Fehlervektor ergibt. Man wird diese Entscheidung leicht durch eine graphische Darstellung fällen können.

Dazu senkrecht steht der zweite Fehlervektor, den wir im folgenden „Längsfehlervektor“ nennen wollen. Diese Fehlerkomponente läßt sich nun durch eine Seitenänderung dann eliminieren, wenn man die Seiten, je nach Ihrem Fehlereinfluß, verlängert bzw. verkürzt:

Sowohl der Einfluß der Winkeländerungen als auch jener der Seitenänderungen kann bei Verwendung von Millimeterpapier sofort in Koordinatenänderungen umgewandelt werden.

a) „Querfehler“

Zwecks Bestimmung der Querfehlerichtung führt der folgende Weg zum Ziel (Abb. 1).

Wird in einem Polygonzug ein Winkel geändert, so bedeutet dies eine Drehung des Restteiles des Zuges um den Punkt, in welchem die Winkeländerung erfolgt. Im folgenden werden die Verbindungslinien der Polygon- also Drehpunkte mit dem freigewählten Polygonzugsende mit r bezeichnet. Durch die Drehungen jeweils um den Winkel ν'' entstehen die folgenden Größen:

Drehung im Punkt 2: $p_2 = r_2 \cdot \nu = \overline{12}'$, wobei $r_2 = s_{12}$ ist.

Die Zerlegung in die Koordinatenrichtungen ergibt, wenn ϵ_2 Null ist:

$$y = -r_2 \nu \quad \text{und} \quad x = 0$$

Durch diese Drehung ist der Punkt 1 zum Punkt 2' gewandert.

Drehung in Punkt 3: $p_3 = \overline{2'3'} = r_3 \nu$

Die Zerlegung in die Koordinatenrichtungen ergibt analog:

$$\Delta y_{2'3'} = -r_3 \nu \cos \epsilon_3 \quad \text{und} \quad \Delta x_{2'3'} = r_3 \nu \sin \epsilon_3$$

Durch diese zusätzliche Drehung wandert der Endpunkt vom Punkt 2' zum Punkt 3' und die Koordinaten von 3' sind demnach

$$y = -r_2 \nu \cos \epsilon_2 - r_3 \nu \cos \epsilon_3 \quad \text{und} \quad x = r_2 \nu \sin \epsilon_2 + r_3 \nu \sin \epsilon_3,$$

wie in Abb. 1 ersichtlich ist.

Nun werden die Drehungen in den folgenden Punkten durchgeführt und die Koordinaten der Punkte 4', 5' etc. berechnet.

Führte man jedoch diese Drehungen im gleichen Sinn bei allen $n-1$ Polygonpunkten in einem n -seitigen Polygon durch, so würde zwangsläufig der Polygonwinkel im n -ten Punkt sich um $(n-1) \nu$ ändern, was selbstverständlich untragbar wäre. Es wird daher in der zweiten Polygonzugshälfte das Vorzeichen der Winkeländerungen, wie schon erläutert, geändert, wodurch das Polygonzugsende den in Abb. 1 dargestellten Weg über die Punkte 5', 6', 7' etc. beschreibt. Es ergibt sich für die Koordinaten von Punkt 5'

$$y = -\nu [r \cos \epsilon]_2^5 \quad \text{und} \quad x = \nu [r \sin \epsilon]_2^5$$

Für den Punkt 6' erhält man

$$\Delta y_{5'6'} = r_6 \nu \cos \epsilon_6 \quad \text{und} \quad \Delta x_{5'6'} = -r_6 \nu \sin \epsilon_6$$

und daraus $y = -\nu [r \cos \epsilon]_2^5 + \nu r_6 \cos \epsilon_6$

$$\text{und} \quad x = \nu [r \sin \epsilon]_2^5 - \nu r_6 \sin \epsilon_6$$

Für die Koordination des Endpunktes 9' ergeben sich daher

$$y = -\nu [r \cos \epsilon]_2^5 + \nu [r \cos \epsilon]_6^9$$

$$\text{und} \quad x = \nu [r \sin \epsilon]_2^5 - \nu [r \sin \epsilon]_6^9$$

Daraus erhält man den Richtungswinkel der Fehlerkomponente $\overline{19'}$ zu

$$\tan \varphi = \frac{y_{9'}}{x_{9'}} = \frac{-[r \cos \varepsilon]_2^5 + [r \cos \varepsilon]_6^9}{[r \sin \varepsilon]_2^5 - [r \sin \varepsilon]_6^9}$$

oder allgemein

$$\tan \varphi = \frac{-[r \cos \varepsilon] \frac{n+(1)}{2} + [r \cos \varepsilon] \frac{n}{\frac{n+(1)}{2} + 1}}{[r \sin \varepsilon] \frac{n+(1)}{2} - [r \sin \varepsilon] \frac{n}{\frac{n+(1)}{2} + 1}} \dots (1)$$

worin (1) in der Formel für ein Polygon mit ungerader Seitenanzahl gilt. Bei gerader Seitenanzahl entfällt dieser Einser.

Am Rande sei folgendes bemerkt:

Ist das Polygon ein regelmäßiges Vieleck mit gerader Seitenzahl, so läßt sich leicht zeigen, daß die erste Fehlerkomponente stets senkrecht zur ersten Polygonseite steht. Führt man einen Grenzübergang durch, d. h. geht die Seitenanzahl n gegen ∞ , geht also das Vieleck in einen Kreis über, so sieht man sofort, daß der Nenner der Gleichung (1) gegen Null konvergiert, während der Zähler stets von Null verschieden ist, so daß die Fehlerkomponente die Richtung senkrecht zur Tangente, also parallel zum Radiusvektor im Anfangspunkt des „Polygons“ einnimmt.

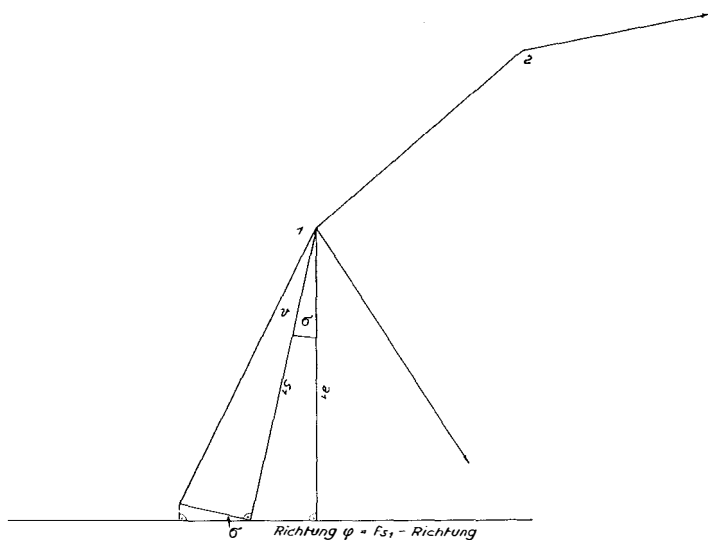


Abb. 2

Liegt nunmehr die Richtung φ fest, so ergibt sich aus Abb. 2

$$p_1 = s_1 \upsilon \quad p_1 \cos \sigma = \upsilon s_1 \cos \sigma = \upsilon a_1$$

Folglich lautet die einfache Verbesserungsgleichung

$$f_{s1} = v [a] \text{ und } v = \frac{f_{s1}}{[a]}, \quad \dots (2)$$

wodurch die Änderungsgröße für die Winkel berechnet ist.

b) „Längsfehler“

Wie aus Abb. (3) sofort abzulesen ist, ergibt sich bei einer Seitenänderung, welche durch Multiplikation der Seite mit dem Faktor m_s erfolgen soll, auf eine beliebige Richtung der Änderungseinfluß

$$m_s \cdot s_1 \cos v_1 + m_s \cdot s_2 \cos v_2 + \dots m_s \cdot s_n \cos v_n,$$

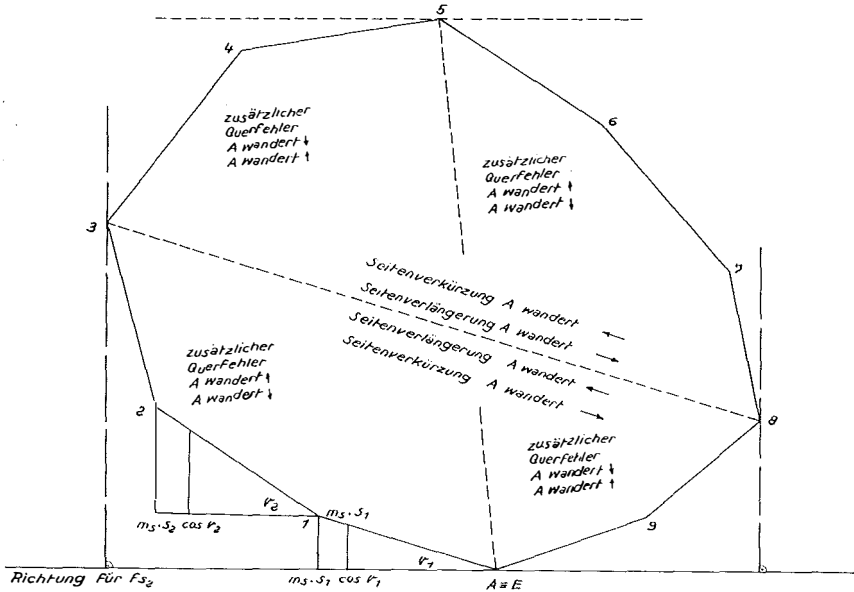


Abb. 3

wenn v der Winkel zwischen der jeweiligen Polygonzugsseite und der beliebigen Richtung ist. Man erhält für den Faktor m_s also

$$m_s = \frac{f_{s2}}{[|s \cos v |]} \quad \dots (3)$$

wenn mit f_{s2} die Fehlerkomponente in der zweiten, zur Querfehlerichtung senkrechten Lage verstanden wird.

c) Vorgang der Fehleraufteilung

Im einzelnen sind nun die folgenden Arbeitsgänge durchzuführen:

1. Kartierung des Polygons im Maßstab etwa 1:2500 nach erfolgter erster Berechnung, wobei bereits der Winkelwiderspruch aufgeteilt worden ist.

2. Graphische Ermittlung der Richtung der ersten Fehlerkomponente f_{s1} nach Gleichung (1), wodurch auch die zweite Richtung als Senkrechte sofort gefunden wird.

3. Graphische Übertragung der Fehler f_x und f_y auf die beiden Fehlerkomponentenrichtungen f_{s1} und f_{s2} .

4. Aufteilung des Längsfehlers, wobei zuerst m_s bestimmt wird. In Gleichung (3) ist die Summe $s \cos v$ absolut zu bilden, da ja, wie schon erwähnt, die Seiten je nach ihrem Fehlereinfluß verlängert bzw. verkürzt werden müssen.

Es sei hiebei bemerkt, daß bei dieser Fehleraufteilung auch ein zusätzlicher Querfehler entsteht, dessen Betrag jedoch klein ist, da für diesen Querfehler die Seitenverlängerung der Seitenverkürzung entgegenwirkt.

5. Nunmehr ist der gesamte Querfehler, der sich aus dem ursprünglichen, algebraisch vermehrt um den zusätzlichen Querfehler aus der Längsfehleraufteilung ergibt, nach Gleichung (2) durch Bestimmung der Winkeländerung v zu eliminieren.

6. Die jeweiligen Koordinatenverbesserungen werden entweder graphisch dem Millimeterpapier entnommen, oder aber der Zug mit den geänderten Seiten und Winkeln nochmals durchgerechnet.

3. Praktisches Beispiel

Ein 20seitiges, geschlossenes Polygon (Abb. 4) ist Gegenstand dieser Fehleraufteilung. Um mit eindrucksvolleren Größen operieren zu können, wurde als Abschlußfehler f_s ein Wert gewählt, der dem Maximalbetrag für die Genauigkeitsstufe II der Fehlergrenze für Hilfspolygone entspricht.

ad 2. Nach Gleichung (1) erhält man für

$$\begin{array}{rcl} - [r \cos \varepsilon]_1^{10} & = & - 82,9 \text{ cm} & [r \sin \varepsilon]_1^{10} & = & 116,0 \text{ cm} \\ [r \cos \varepsilon]_{11}^{20} & = & - 76,8 \text{ cm} & - [r \sin \varepsilon]_{11}^{20} & = & - 120,9 \text{ cm} \\ \text{zusammen} & & - 159,7 \text{ cm} & & & - 4,9 \text{ cm} \end{array}$$

Demnach ist $\tan \varphi = \frac{-159,7}{-4,9}$. Diese Richtung ist also die f_{s1} -Richtung.

ad 3. Wird nun der Fehler f_s , wie er sich aus der ersten Durchrechnung ergeben hat, in die Komponenten f_{s1} und f_{s2} zerlegt, so ergeben sich für $f_{s1} = -0,44$ m und für $f_{s2} = +0,90$ m.

ad 4. Nach Gleichung (3) erhält man

$$[| s \cos v |] = 1244 \text{ m} = 2 \times \overline{OU} = 2 \times 622 = 1244 \text{ m.}$$

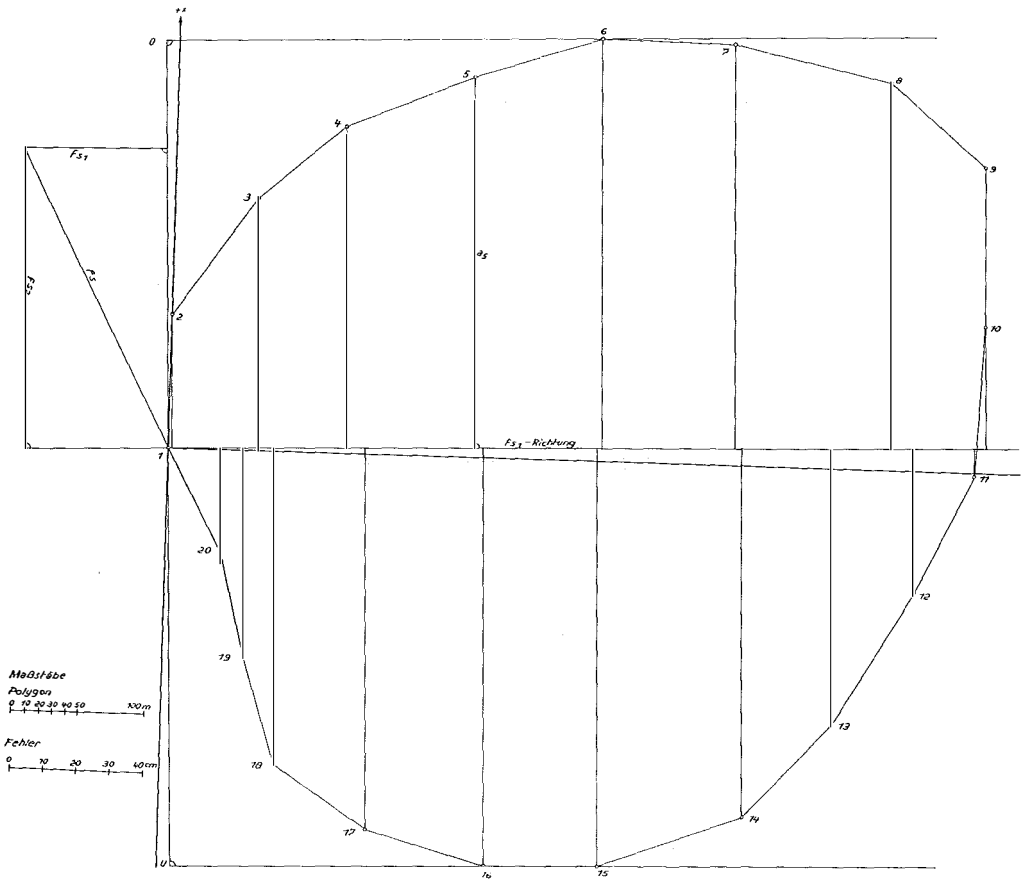


Abb. 4

Der Ausdruck $[|s \cos v|]$ ist außerordentlich einfach graphisch zu ermitteln, man hat lediglich das Polygon senkrecht auf die Richtung f_{s2} zu projizieren. Diese Länge \overline{OU} verdoppelt ist bereits der gesuchte Ausdruck.

In unserem Fall ergibt sich für m_s ein Betrag von

$$\frac{0,905}{1244} = 0,000723$$

Nunmehr werden die Seiten von 1 bis zum Punkt 6 und vom Punkt 16 bis zum Punkt 20 verkürzt und die Seiten von Punkt 6 bis zum Punkt 16 verlängert, der Faktor ist 0,000723.

Wandelt man diese Änderung graphisch in die Koordinatenverbesserungen um, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Längenverbesserung (f_{s2})

	f_{s2} (Längsfehler)		f_{s1} (zusätzl. Querfehler)	
	in cm		in cm	
	einzel	zusammen	einzel	zusammen
1	—	—	—	—
2	— 7,0	— 7,0	0	0
3	— 6,2	— 13,2	— 4,8	— 4,8
4	— 4,0	— 17,2	— 4,9	— 9,7
5	— 2,7	— 19,9	— 6,9	— 16,6
6	— 2,2	— 22,1	— 7,1	— 23,7
7	— 0,4	— 22,5	+ 7,2	— 16,5
8	— 2,1	— 24,6	+ 8,3	— 8,2
9	— 4,7	— 29,3	+ 5,1	— 3,1
10	— 8,7	— 38,0	0	— 3,1
11	— 8,0	— 46,0	— 0,6	— 3,7
12	— 6,3	— 52,3	— 3,2	— 6,9
13	— 7,2	— 59,5	— 4,5	— 11,4
14	— 4,9	— 64,4	— 4,9	— 16,3
15	— 2,7	— 67,1	— 8,0	— 24,3
16	0	— 67,1	— 6,0	— 30,3
17	— 2,0	— 69,1	+ 6,3	— 24,0
18	— 3,6	— 72,7	+ 5,1	— 18,9
19	— 5,9	— 78,6	+ 1,7	— 17,2
20	— 5,6	— 84,2	+ 1,2	— 16,0
1	— 5,7	— 89,9	+ 2,7	— 13,3
		— 89,9 cm		— 13,3 cm

ad 5. Aufteilung des gesamten Querfeldes vom Betrage

$$-0,44 \text{ m und } -0,133 \text{ m d. s. } -0,573 \text{ m}$$

Nach Gleichung (2) ergibt sich nun, wenn man für f_{s1} den Wert von $-0,573 \text{ m}$ einsetzt

$$v^{cc} = \frac{0,573 \cdot \rho^{cc}}{1597 \cdot 2,5} = 91^{cc}.$$

In diesem Ausdruck ist 1597 die Summe der Größen a in mm. Da der Kartierungsmaßstab 1:2500 beträgt, scheint der Koeffizient 2,5 auf.

Nunmehr ergeben sich die zweiten Verbesserungen aus

$$\frac{91^{cc}}{\rho^{cc}} \cdot s_n$$

Diese Strecke ist senkrecht auf die jeweilige Seite aufzutragen und das v_x bzw. v_y abzulesen. Diese Werte sind mit der Stellungszahl im Polygonzug zu multiplizieren, da sich ja die Richtungswinkel der einzelnen Seiten um v , $2v$, $3v$ usw. ändern, und hernach zu summieren. Die jeweiligen Summen ergeben die Koordinatenverbesserungen der Polygonpunkte. Diese Querfehlerverbesserungen mit den Längsfehlerverbesserungen kombiniert, ergeben die Gesamtverbesserung der Polygonpunktkoordinaten.

Im beigegebenen Beispiel wurde die Berechnung jedoch ein zweites Mal mit den verbesserten Größen durchgeführt.

1. Berechnung

Pkt.	β		s	y	x	Pkt.
1	230 50 3			500,000	500,000	1
		000 00 0	100,00	+ 0,000	+ 100,000	
2	236 90 0			500,000	600,000	2
		36 90 0	108,00	+ 59,153	+ 90,360	
3	220 60 0			559,153	690,360	3
		57 50 0	87,00	+ 68,323	+ 53,860	
4	217 50 0			627,476	744,220	4
		75 00 0	103,00	+ 95,160	+ 39,416	
5	203 00 0			722,636	783,636	5
		78 00 0	102,00	+ 95,970	+ 34,551	
6	225 10 0			818,606	818,187	6
		103 10 0	99,00	+ 98,882	- 4,819	
7	208 70 0			917,488	813,368	7
		111 80 0	119,00	+ 116,962	- 21,931	
8	234 20 0			1034,450	791,437	8
		146 00 0	97,00	+ 72,761	- 64,147	
9	252 00 0			1107,211	727,290	9
		198 00 0	120,00	+ 3,769	- 119,941	
10	205 50 0			1110,980	607,349	10
		203 50 0	111,00	- 6,099	- 110,832	
11	224 80 0			1104,881	496,517	11
		228 30 0	98,00	- 42,144	- 88,475	
12	205 20 0			1062,737	408,042	12
		233 50 0	118,00	- 59,268	- 102,036	
13	214 00 0			1003,469	306,006	13
		247 50 0	96,00	- 65,165	- 70,495	
14	230 20 0			938,304	235,511	14
		277 70 0	116,00	- 108,955	- 39,808	
15	220 50 0			829,349	195,703	15
		298 20 0	83,00	- 82,967	- 2,346	
16	218 30 0			746,382	193,357	16
		316 50 0	93,00	- 89,894	+ 23,835	
17	220 80 0			656,488	217,192	17
		337 30 0	87,00	- 72,489	+ 48,108	
18	243 80 0			583,999	265,300	18
		381 10 0	84,00	- 24,573	+ 80,325	
19	203 20 0			559,426	345,625	19
		384 30 0	80,00	- 19,530	+ 77,579	
20	185 19 7			539,896	423,204	20
		369 49 7	87,55	- 40,361	+ 77,691	
1	230 50 3			499,535	500,895	1
		000 00 0				
2						2

2. Berechnung

Pkt.	β		s	y	x	Pkt.
1	230 49 40			500,00	500,00	1
		399 99 10	99,928			
2	236 89 10			499,986	599,928	2
		36 88 20	107,922			
3	220 59 10			559,071	690,239	3
		57 47 30	86,937			
4	217 49 10			627,322	744,090	4
		74 96 40	102,926			
5	202 99 10			722,391	783,531	5
		77 95 50	101,926			
6	225 09 10			818,267	818,125	6
		103 04 60	99,072			
7	208 69 10			917,225	813,386	7
		111 73 70	119,086			
8	234 19 10			1034,393	791,555	8
		145 92 80	97,070			
9	251 99 10			1107,178	727,443	9
		197 91 90	120,087			
10	205 49 10			1111,102	607,420	10
		203 41 00	111,080			
11	224 80 90			1105,155	496,499	11
		228 21 90	98,071			
12	205 20 90			1063,093	407,906	12
		233 42 80	118,085			
13	214 00 90			1003,899	305,729	13
		247 43 70	96,069			
14	230 20 90			938,757	235,119	14
		277 64 60	116,084			
15	220 50 90			829,756	195,190	15
		298 15 50	83,060			
16	218 30 90			746,731	192,783	16
		316 46 40	92,933			
17	220 80 90			656,889	216,550	17
		337 27 30	86,937			
18	243 80 90			584,432	264,591	18
		381 08 20	83,939			
19	203 20 90			559,854	344,851	19
		384 29 10	79,942			
20	185 20 60			540,327	422,372	20
		369 49 70	87,487			
1	230 49 40			499,995	500,007	1
		399 99 10				
2						