Paper-ID: VGI_196003

Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik

Peter Meissl [1]

[1] *Technische Hochschule Wien IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **48** (1), S. 17–23

1960

BibTEX:

```
@ARTICLE{Meissl_VGI_196003,
Title = {Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen im Rahmen der mathematischen
     Statistik},
Author = {Meissl, Peter},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {17--23},
Number = {1},
Year = {1960},
Volume = {48}
}
```

Ringen bestimmt wird, mit anderen Worten, jeder Ermittlung des ersten Spiegelabstandes haftet ein systematischer Fehler von $\pm$ 1 μm an und die hohe Genauigkeit des Interferenzverfahrens kann nicht ausgenützt werden. Die Vergleichung aller Quarzmeter untereinander ist auf $\pm$ 0,004 μm möglich. Sie bilden ein eigenes Maßstabsystem, dessen Genauigkeit weit über dem vom Strichmaß des internationalen Meters ableitbaren liegt. Erst mit Inkrafttreten der Meterdefinition in Wellenlängen der gelborangen Linie des Kryptonisotopes Kr 86 (1 m = 1,650.763,73 Vakuumwellenlängen [15]) im Jahre 1960, die eine Genauigkeit von 3 . 10^{-8} verbürgen wird, wird die strenge Ausdrückung des derzeitigen „Quarz- oder Väisälä-Maßstabes", den die Interferenzbasen ergeben, in internationalen Metern möglich sein. Dazu ist nur die bereits erfolgte interferentielle Ausmessung eines Quarzmaßstabes notwendig [14].

In Europa bestehen derzeit drei Interferenzbasen: die Nummela-Basis in Finnland (864 m), die Basis von Loenermark in den Niederlanden (576 m, 1957 gemessen durch das Finnische Geodätische Institut) und die Basis im Ebersberger Forst bei München (864 m, 1958 errichtet und durch das Deutsche Geodätische Forschungsinstitut unter finnischer Anleitung in zwei Teilstücken von je 432 m gemessen). Die Genauigkeit der Interferenzstrecken beträgt D . 10^{-7}. Die trigonometrische Übertragung der Spiegelstrecke auf die Stabilisierungen der z. B. in München in 2,5 m Abstand parallel dazu angeordneten Drahtvergleichsstrecke hat eine Unsicherheit von etwa $\pm$ 0,1 bis 0,2 mm; das ergibt als Unsicherheit für die Länge der Vergleichsbasis bei München ca. $\pm$ 0,2 mm. Diese Genauigkeit gilt aber praktisch nur für den Zeitpunkt der interferentiellen Ausmessung, die wegen Bodenbewegungen von Zeit zu Zeit wiederholt werden muß.

Die Münchener Interferenzstrecke wurde sowohl für die Drahtvergleiche für die Münchener Basismessung (1958) als auch für Heerbrugg verwendet. Beiden Basen liegt somit vorläufig der „*Väisälä-Maßstab*" zugrunde. Die verwendeten Ausdehnungskoeffizienten der Drähte wurden teils an der *Physikalisch-Technischen Bundesanstalt* (PTB) in Braunschweig, teils im *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) in Bréteuil bestimmt. Es sei noch ergänzend bemerkt, daß die Komparierungen unter den gleichen günstigen Wetterverhältnissen wie bei der Basismessung verliefen und daß auch hier mit einer Temperaturstation gearbeitet wurde.

Über das Ergebnis der Drahtvergleiche wird im Abschnitt 7 berichtet.

(Fortsetzung folgt.)

Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik

Von *P. Meissl*, Wien

§ 1. **Einleitung.** Anknüpfend an den in Nr. 3, Jg. 1959, erschienen Artikel „Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik" [1] von *W. Eberl* soll im folgenden der Fall bedingter Beobachtungen vom Standpunkt der linearen Schätztheorie her betrachtet werden.

Da vermittelnder und bedingter Ausgleich durchaus äquivalent sind — es handelt sich ja nur um verschiedene Formulierungen desselben Problems —, ließen sich die einzelnen Sätze für bedingte Beobachtungen aus den entsprechenden für vermittelnde gewinnen. Einer geschlosseneren Darstellung wegen sollen sie aber noch einmal ab ovo hergeleitet werden. Dabei wird nach dem Vorbild der zitierten Arbeit das sehr zweckmäßige Summationsübereinkommen verwendet, welches, durch einen weiteren Index ergänzt, an dieser Stelle noch einmal angegeben sei:

Kommt in einem Produkt ein Zeiger zweimal vor, so ist über ihn zu summieren. Dabei laufen die Zeiger

a, b, c, d .... von 1 bis m,
p, q, r .... von $m+1$ bis n $(n > m)$,
i, j, k, l .... von 1 bis n.

§ 2. **Die besten erwartungstreuen linearen Schätzungen.** Es seien $Y_1, \ldots, Y_n$ n Beobachtungen mit den Erwartungen $EY_i = \theta_i$ und der Kovarianzmatrix

$$E[(Y_i - \theta_i)(Y_j - \theta_j)] = \delta_{ij}\,\sigma^2 . \quad \ldots (3)$$

Die Beobachtungen sind also unkorreliert und haben alle die gleiche Varianz σ^2. Zwischen den Erwartungen θ_i bestehen m bekannte, lineare, unabhängige Beziehungen (*Bedingungen*)

$$u_{ai}\,\theta_i = u_{ao} . \quad \ldots (4)$$

Die Bedingungen können als unabhängig vorausgesetzt werden, da andernfalls gewisse unter ihnen überflüssig wären. Bedeutet (D^{ab}) die m-reihige symmetrische Matrix $(u_{ai}\,u_{bi})$, dann ist nach [1] Satz 4 und 5 für die lineare Unabhängigkeit der Bedingungen (4) notwendig und hinreichend

$$Det\,(D^{ab}) \neq 0. \quad \ldots (5)$$

Es existiert dann auch die zu (D^{ab}) inverse Matrix (D_{ab}).

Für die Parameter θ_i sollen nun lineare Schätzungen

$$T_i = z_{io} + z_{ij}\,Y_j \quad \ldots (6)$$

gefunden werden, die erwartungstreu sind: $E\,T_i = \theta_i$, und deren Varianz ein Minimum ist: $V\,T_i = Min.$ Eine vollständige Antwort auf diese Fragestellung gibt der

Satz 1*: Sind $Y_1, \ldots, Y_n$ n unkorrelierte Beobachtungen mit $E\,Y_i = \theta_i$, $V\,Y_i = \sigma^2$, wobei zwischen den θ_i genau m linear unabhängige Beziehungen* (4) *bestehen, dann gilt:*

$$\text{a)}\quad T_i = D_{ab}\,u_{bi}\,u_{ao} + (\delta_{ij} - D_{ab}\,u_{bi}\,u_{aj})\,Y_j \quad \ldots (7)$$

sind die eindeutig bestimmten besten erwartungstreuen linearen Schätzungen der θ_i.

$$\text{b)}\quad S^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - T_i)^2/m \quad \ldots (8)$$

ist eine erwartungstreue Schätzung von σ^2.

c) *Die Kovarianzmatrix von $T = (T_1, \ldots, T_n)$ lautet*

$$C\,(T_i, T_j) = (\delta_{ij} - D_{ab}\,u_{bi}\,u_{aj})\,\sigma^2; \quad \ldots (9)$$

ihr Rang ist $n-m$.

a) Beweis: Aus der Forderung nach Erwartungstreue einer linearen Schätzung (6) ergibt sich $E\,T_i = z_{io} + z_{ij}\,\theta_j = \theta_i$ oder

$$(z_{ij} - \delta_{ij})\,\theta_j + z_{io} = 0. \quad \ldots (10)$$

Diese Beziehung muß für alle jene θ_j erfüllt sein, welche

$$u_{aj}\,\theta_j - u_{ao} = 0 \quad \ldots (4a)$$

erfüllen. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn (10) eine (beliebige) Linearkombination von (4a) ist: $(z_{ij} - \delta_{ij})\,\theta_j + z_{io} \equiv - \lambda_{ai}(u_{aj}\,\theta_j - u_{ao})$.[1] Koeffizientenvergleich liefert $z_{ij} = \delta_{ij} - \lambda_{ai}\,u_{aj}$ und $z_{io} = \lambda_{ai}\,u_{ao}$. Der Ansatz für eine erwartungstreue Schätzung lautet demnach

$$T_i = \lambda_{ai}\,u_{ao} + (\delta_{ij} - \lambda_{ai}\,u_{aj})\,Y_j. \qquad \ldots (11)$$

Die Größen λ_{ai} können nun so bestimmt werden, daß $V\,T_i$ oder auch $V\,T_i/\sigma^2$ ein Minimum wird: $V\,T_i/\sigma^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda_{ai}\,u_{aj})^2 = Min.$ Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach λ_{bi} liefert $(\delta_{ij} - \lambda_{ai}\,u_{aj})\,u_{bj} = 0$ oder $\lambda_{ai}\,D^{ab} = u_{bi}$. Daraus bestimmen sich die λ_{ai} zu $\lambda_{ai} = D_{ab}\,u_{bi}$. Setzt man diese Werte in (11) ein, so ergibt sich (7).

b) Aus (7) folgt unmittelbar $Y_i - T_i = D_{ab}\,u_{bi}\,(u_{aj}\,Y_j - u_{ao})$. Wegen $u_{ao} = u_{aj}\,\theta_j$ erhält man

$$Y_i - T_i = D_{ab}\,u_{bi}\,u_{aj}\,(Y_j - \theta_j). \qquad \ldots (12)$$

Daraus folgt

$mS^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (Y_i - T_i)^2 = D_{ab}\,u_{bi}\,u_{aj}\,(Y_j - \theta_j)\,D_{cd}\,u_{di}\,u_{ck}\,(Y_k - \theta_k) = D_{ab}\,D^{bd}\,D_{cd}\,u_{aj}\,u_{ck}$ $(Y_j - \theta_j)\,(Y_k - \theta_k) = D_{ab}\,u_{aj}\,u_{bk}\,(Y_j - \theta_j)\,(Y_k - \theta_k)$. (Es ist ja $D^{bd}\,D_{cd} = \delta_{bc}$). Somit nach Umbenennung der Indizes

$$mS^2 = D_{ab}\,u_{bi}\,u_{aj}\,(Y_i - \theta_i)\,(Y_j - \theta_j)\,. \qquad \ldots (13)$$

Unter Beachtung von (3) findet man für die Erwartung von mS^2: $E\,(mS^2) = D_{ab}\,u_{bi}\,u_{aj}\,\delta_{ij}\,\sigma^2 = D_{ab}\,D^{ab}\,\sigma^2 = \delta_{aa}\,\sigma^2 = m\,\sigma^2$. Damit ist die Behauptung b) bewiesen.

c) Aus (12) folgt nach kleiner Umformung

$$T_i - \theta_i = (\delta_{ij} - D_{ab}\,u_{bi}\,u_{aj})\,(Y_j - \theta_j). \qquad \ldots (14)$$

---

[1]) Diese Behauptung bedarf vielleicht einer näheren Erläuterung. Der Wertevorrat der zu schätzenden Parameter θ_i wird durch die Bedingungen (4a) auf einem $(n - m)$-dimensionalen Unterraum des n-dimensionalen euklidischen Raumes eingeschränkt. Die Beziehung (10) — den Index i denke man sich darin festgehalten — muß für alle jene θ_i-Werte erfüllt sein, die dem erwähntem Unterraum angehören. Es wird behauptet, daß dies dann und nur dann gewährleistet ist, wenn (10) eine Linearkombination von (4a) ist:

$$(z_{ij} - \delta_{ij})\,\theta_j + z_{io} = - \lambda_{ai}\,(u_{aj}\,\theta_j - u_{ao}). \qquad \ldots (10a)$$

(Die Koeffizienten dieser Linearkombination wurden mit $-\lambda_{ai}$ bezeichnet.) Zunächst sieht man leicht ein, daß diese Voraussetzung hinreichend ist, denn aus (4a) folgt vermöge (10a) die Gültigkeit von (10). Die Notwendigkeit von (10a) soll indirekt bewiesen werden. Angenommen (10) ist keine Linearkombination von (4a). Dann gilt

$$(z_{ij} - \delta_{ij})\,\theta_j + z_{io} = - \lambda_{ai}\,(u_{aj}\,\theta_j - u_{ao}) + g_j\,\theta_j - g_o \qquad \ldots (10b)$$

Dabei ist $g_j\,\theta_j - g_o$ eine von (4a) unabhängige Beziehung. Das aus den $m + 1$ Gleichungen

$$u_{aj}\,\theta_j - u_{ao} = 0$$
$$g_j\,\theta_j - g_o = \triangle \neq 0$$

bestehende System ist somit lösbar. Sei $\theta_1{}^*, \ldots, \theta_n{}^*$ eine Lösung, dann folgt aus (10b): $(z_{ij} - \rho_{ij})\,\theta_j{}^* + z_{io} = \triangle$. Das bedeutet, daß $\theta^* = (\theta_1{}^*, \ldots, \theta_n{}^*)$ ein Parameter des Unterraums ist, für den die Schätzung (6) nicht erwartungstreu ist.

Die Kovarianz von T_i und T_k ist daher gleich $C(T_i, T_k) = E[(T_i - \theta_i)(T_k - \theta_k)] = (\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})(\delta_{kl} - D_{cd}\, u_{dk}\, u_{cl})\, \delta_{jl}\, \sigma^2 = (\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})(\delta_{jk} - D_{cd}\, u_{dk}\, u_{cj})\, \sigma^2 = (\delta_{ik} - 2\, D_{ab}\, u_{bi}\, u_{ak} + D_{ab}\, D^{ac}\, D_{cd}\, u_{bi}\, u_{dk})\, \sigma^2$. Wegen $D^{ac}\, D_{cd} = \delta_{ad}$ lassen sich der zweite und dritte Term zusammenziehen, so daß sich schließlich (9) ergibt.

Um die den Rang betreffende Behauptung zu beweisen, sei zunächst zur Abkürzung $D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj}$ mit A_{ij} und $(\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})$ mit B_{ij} bezeichnet. Aus $A_{ij} + B_{ij} = \delta_{ij}$ folgt für die Ränge dieser Matrizen $R(A_{ij} + B_{ij}) = n$, und weiter

$$R(A_{ij}) + R(B_{ij}) \geq n.\text{[2]} \qquad \ldots (15)$$

Da A_{ij} ein Produkt dreier Matrizen ist, deren Rang genau m ist, kann ihr Rang höchstens gleich m sein

$$R(A_{ij}) \leq m.\text{[3]} \qquad \ldots (16)$$

Zwischen den Zeilen von (B_{ij}) bestehen die m linearen, unabhängigen Beziehungen $B_{ij}\, u_{ci} = (\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})\, u_{ci} = u_{cj} - \delta_{ac}\, u_{aj} = 0$. Somit

$$R(B_{ij}) \leq n-m. \qquad \ldots (17)$$

(15), (16) und (17) ergeben aber

$$R(A_{ij}) = m, \qquad \ldots (18)$$
$$R(B_{ij}) = n-m.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß die Kovarianzmatrix $C(T_i, T_j)$ deswegen den Rang $n-m$ hat, weil zwischen den T_i m linear unabhängige Beziehungen herrschen. Man überzeugt sich leicht, daß dies gerade die m Bedingungsgleichungen (4) sind. (Überschieben von (7) mit u_{ci} liefert $u_{ci}\, T_i = u_{co}$). Bekanntlich führt der Ansatz $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - T_i)^2 = \mathit{Minimum}$, unter den Nebenbedingungen $u_{ai}\, T_i = u_{ao}$ zu denselben Ausdrücken (7). Um dabei den Anschluß an den in der Ausgleichsrechnung üblichen Algorithmus zu gewinnen, kann man (7) in der Form $T_i = Y_i + D_{ab}\, u_{bi}\, (u_{ao} - u_{aj}\, Y_j) = Y_i + v_i$ schreiben. Die „*Verbesserungen*" v_i lassen sich dann in der Form $v_i = u_{bi}\, D_{ab}\, (u_{ao} - u_{aj}\, Y_j) = u_{bi}\, k_b$ schreiben, wobei die k_b „*Korrelaten*" genannt werden. Für $u_{ao} - u_{aj}\, Y_j$ ist auch die Bezeichnung „*Widersprüche*" w_a gebräuchlich. Die Korrelaten erhält man aus den Gleichungen $D^{ab}\, k_b = w_a$.

In Satz 1 wurden hinsichtlich der Verteilung der Y_i lediglich über Mittel und Kovarianzmatrix Voraussetzungen gemacht. Unter der zusätzlichen Annahme, daß die Y_i (unabhängig) nach Gauß verteilt sind, ergibt sich der

Satz 2: Sind die Beobachtungen Y_i unabhängig voneinander nach $G(\theta_i, \sigma^2)$ *verteilt und genügen die θ_i den linear unabhängigen Beziehungen* (4), *dann gilt*

---

[2]) Dies sieht man leicht durch folgende Überlegung ein. Die Zeilen von (A_{ij}) bzw. (B_{ij}) als Vektoren aufgefaßt, bilden je einen Vektorraum vom Rang $R(A_{ij})$ bzw. $R(B_{ij})$. Der von $(A_{ij} + B_{ij})$ aufgespannte Vektorraum muß ganz in dem von (A_{ij}) und (B_{ij}) gemeinsam aufgespannten Raum enthalten sein und kann daher höchstens den Rang $R(A_{ij}) + R(B_{ij})$ haben.

[3]) Die Zeilen eines Matrizenproduktes $(Z_{ik}) = (X_{ij}\, Y_{jk})$ sind Linearkombinationen der Zeilen von (Y_{jk}) und liegen daher ganz in dem von den letzteren aufgespannten Raum. Die Spaltenvektoren von (Z_{ik}) sind Linearkombinationen der Spalten von (X_{ij}) und liegen daher ganz in den von den letzteren aufgespannten Raum. Daher kann $R(Z_{ik})$ höchstens gleich dem Minimum von $R(X_{ij})$ und $R(Y_{jk})$ sein.

a) *Die in Satz 1 gefundenen Schätzungen T_i sind auch die plausiblen. Die T_i sind nach Gauß verteilt, jedoch herrschen zwischen ihnen die m linearen Beziehungen* (4).

b) $m\, S^2/\sigma^2$ und $\sum_{i=1}^{n} (T_i - \theta_i)^2/\sigma^2$ *sind unabhängig voneinander nach χ^2 mit m bzw. $n-m$ F.g. verteilt. Es ist $E\, S^2 = \sigma^2$ und $V\, S^2 = 2\, \sigma^4/m$. $V\, S^2$ wird durch* $2\, S^4/(m+2)$ *erwartungstreu geschätzt.*

Beweis: Da mit den Voraussetzungen dieses Satzes auch die des vorhergehenden erfüllt sind, gelten die Aussagen a), b) und c) von Satz 1 auch hier.

a) Die Dichte der gemeinsamen Verteilung der Y_i lautet wegen ihrer Unabhängigkeit

$$f(y_1, \ldots y_n; \theta_1, \ldots, \theta_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \sigma^n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \theta_i)^2}$$

$$\text{mit } u_{ai}\, \theta_i = u_{ao}\,.$$

Dies ist aber bereits die Plausibilitätsfunktion P (vgl. [1] § 4) der Parameter θ_i und σ^2, die als Variable aufzufassen sind. P nimmt ein Maximun für $\theta_i = \hat{\theta}_i$, $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$ an. Auf die Durchrechnung dieser Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen sei hier verzichtet. Man erhält $\hat{\theta}_i = T_i$ in Übereinstimmung mit (7)[4]. Die T_i sind als lineare Funktionen von Gaußmerkmalen wieder nach Gauß verteilt.

b) Unter Beachtung von (14) ergibt sich: $\sum_{i=1}^{n} (T_i - \theta_i)^2 = (\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})$ $(\delta_{ik} - D_{cd}\, u_{di}\, u_{ck})\, (Y_j - \theta_j)\, (Y_k - \theta_k) = (\delta_{jk} - 2\, D_{ab}\, u_{bk}\, u_{aj} + D_{ab}\, D^{bd}\, D_{cd}\, u_{aj}\, u_{ck})$ $(Y_j - \theta_j)\, (Y_k - \theta_k) = (\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})\, (Y_i - \theta_i)\, (Y_j - \theta_j) = Q_2$. Q_2 ist eine quadratische Form in $(Y_i - \theta_i)$. $(Y_i - \theta_i)$ ist nach $G\,(0, \sigma^2)$ verteilt. Auch mS^2 ist nach (13) eine quadratische Form Q_1 in $(Y_i - \theta_i)$. Es besteht offensichtlich die Relation $Q_1 + Q_2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \theta_i)^2$. Nach (18) ist der Rang von Q_1 gleich m und der von Q_2 gleich $n-m$. Damit sind die Voraussetzungen des in [1] § 3 zitierten Satzes von *Cochran* erfüllt und Q_1/σ^2, Q_2/σ^2 unabhängig voneinander nach χ^2 mit m bzw. $n-m$ F.g. verteilt. Die weiteren Behauptungen ergeben sich genau so wie beim Beweis von [1] Satz 9 daraus, daß für Mittel und Varianz eines nach χ^2 mit m F.g. verteilten Merkmales X die Formeln $E\, X = m$ und $V\, X = 2\, m$ gelten.

§ 3. **Zurückführung bedingter Beobachtungen auf vermittelnde.** Den Übergang von bedingten Beobachtungen auf vermittelnde erleichtert der folgende Satz:

Satz 3: Sind x_{pi} $n-m$ unabhängige Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$u_{ai}\, x_i = 0, \qquad \ldots (19)$$

ist (S^{pq}) die $(n-m)$-reihige symmetrische Matrix $(x_{pi}\, x_{qi})$ und bedeutet (S_{pq}) die inverse dazu, dann gilt

$$D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj} + S_{pq}\, x_{qi}\, x_{pj} = \delta_{ij}. \qquad \ldots (20)$$

---

[4]) Die plausible Schätzung für σ^2 lautet:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\theta}_i). \quad \hat{\sigma}^2 \text{ ist ungleich } S^2 \text{ und nicht erwartungstreu!}$$

Beweis: Zunächst werden die Abkürzungen $D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj} = A_{ij}$ und $S_{pq}\, x_{qi}\, x_{pj} = B_{ij}$ eingeführt. Die auf folgende Weise definierte Matrix (C_{ki})

$$C_{ci} = u_{ci}$$
$$C_{ri} = x_{ri}$$

ist sicher regulär. Denn es sind die mn-Tupel u_{ci} untereinander unabhängig und auch die $n-m$ n-Tupel x_{ri}, welche außerdem noch wegen (19) zu den u_{ci} orthogonal sind. Bildet man das Produkt $C_{ki}(A_{ij} + B_{ij}) = H_{kj}$, so erhält man nach den Regeln der Matrizenmultiplikation $H_{cj} = u_{ci}\, D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj} + u_{ci}\, S_{pq}\, x_{qi}\, x_{pj} = u_{cj} + 0$. (Der zweite Term verschwindet wegen (19)). Ebenso $H_{rj} = 0 + x_{rj}$. Es besteht also die Beziehung $C_{ki}\,(A_{ij} + B_{ij}) = C_{kj}$. Wegen der Regularität von (C_{ki}) kann $(A_{ij} + B_{ij})$ nur die Einheitsmatrix (δ_{ij}) sein. —

Ausgehend vom Schema der bedingten Beobachtungen $EY_i = \theta_i$, $u_{ai}\, \theta_i = u_{ao}$, lassen sich die mit Bedingungen behafteten Parameter θ_i gemäß der Theorie linearer Gleichungssysteme durch $n-m$ freie Parameter Γ_p ausdrücken:

$$\theta_i = x_{oi} + x_{pi}\, \Gamma_p \qquad \ldots (21)$$

Dabei sind die x_{pi} $n-m$ unabhängige Lösungen des homogenen Gleichungssystems (19) und x_{oi} eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$u_{ai}\, x_{oi} = u_{ao}\,. \qquad \ldots (22)$$

Die Beobachtungsgleichungen erhalten jetzt die Form $E\, Y_i = x_{oi} + x_{pi}\, \Gamma_p$ oder

$$E\,(Y_i - x_{oi}) = x_{pi}\, \Gamma_p\,. \qquad \ldots (23)$$

Dies entspricht aber dem Fall vermittelnder Beobachtungen, denn mit den Y_i sind auch die Merkmale $Y_i - x_{oi}$ unkorreliert und haben nach wie vor die Varianz σ^2. Nach [1] Formel (15) sind $G_p = S_{pq}\, x_{qi}\,(Y_i - x_{oi})$ die besten erwartungstreuen linearen Schätzungen der Γ_p. Benützt man (21), um daraus Schätzungen für die θ_i zu gewinnen, so erhält man $T_i = x_{oi} + x_{pi}\, G_p = x_{oi} + x_{pi}\, S_{pq}\, x_{qj}\,(Y_j - x_{oj}) = x_{oj}\,(\delta_{ij} - S_{pq}\, x_{pi}\, x_{qj}) + S_{pq}\, x_{pi}\, x_{qj}\, Y_j$ und wegen (20) [5] $= D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj}\, x_{oj} + (\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})\, Y_j$. Wegen (22) ergibt sich schließlich $T_i = D_{ab}\, u_{bi}\, u_{ao} + (\delta_{ij} - D_{ab}\, u_{bi}\, u_{aj})\, Y_j$. Ein Vergleich mit (7) zeigt, daß die so gewonnenen T_i die besten erwartungstreuen Schätzungen der θ_i sind.

§ 5. **Schlußbemerkungen.** Die Sätze 1 und 2 entsprechen genau den Sätzen 8 und 9 in [1]. Bei ihrer Anwendung ist besonderes Augenmerk auf die Voraussetzungen zu legen. Sind die Varianzen der Beobachtungen nicht gleich, aber in der Form $VY_i = \sigma^2/p_i$ bei bekannten p_i und unbekanntem σ^2 darstellbar, dann ergibt sich sofort der Fall gleicher Varianzen, wenn man an Stelle der Y_i die Merkmale $\tilde{Y}_i = Y_i \sqrt{p_i}$ (nicht summieren!) betrachtet. (Ausgleichung mit Gewichten). In der Praxis ist oft die Voraussetzung $C\,(Y_i, Y_j) = 0$ für $i \neq j$ nicht erfüllt. Mit anderen Worten, die Y_i sind korreliert. Mißt man zum Beispiel von einem Standpunkt nach verschiedenen Zielpunkten die Richtungen $R_0, R_1, R_2, \ldots$, so sind diese Beobachtungen wohl unkorreliert. Bezieht man sie auf die Ausgangsrichtung R_0, indem man die Differen-

[5]) Wegen der Symmetrie von S_{pq} gilt $S_{pq}\, x_{pi}\, x_{qj} = S_{pq}\, x_{qi}\, x_{pj}$. Damit ist dann der Satz 3 anwendbar.

zen $Y_i = R_i - R_0$ bildet, dann sind die Merkmale Y_i korreliert. Meist setzt man sich über diese Kovarianzen hinweg und läßt die Y_i als unkorrelierte Beobachtungen in die Ausgleichung eingehen. In den sehr allgemeinen Darlegungen [3] bis [5] ist das lineare Schätzproblem auch bei korrelierten Beobachtungen behandelt.

Oft ist die ursprüngliche Form der Bedingungsgleichungen nicht linear. Wie man in solchen Fällen unter den entsprechenden Voraussetzungen (kleine Varianzen, stetige Differenzierbarkeit der Bedingungsgleichungen nach den Parametern) durch Abbruch von Taylorreihen zu linearen Gleichungen kommt, braucht hier nicht vorgeführt zu werden.

§ 6. Literatur:

[1] *W. Eberl:* Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik. Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1959, Nr. 3.

[2] *M. Fisz:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.

[3] *C. R. Rao:* Advanced Statistical Methods in Biometric Research. Wiley, New York, 1952.

[4] *C. R. Rao:* Generalisation of Markoff's theorem and tests of linear hypotheses. Sankhya, the Indian journal of statistics, 1945, 7, 9.

[5] *C. R. Rao:* Markoff's theorem with linear restrictions on parameters. Sankhya, 1945, 7, 16.

Referat

Photogrammetrische Wochen München 1959

Wie schon zur Tradition geworden, so fanden auch in diesem Jahr wieder „Photogrammetrische Wochen" in Müchen statt. In der Zeit vom 7. bis 21. September 1959 wurden sie als Gemeinschaftsdemonstration von Zeiß-Aerotopograph und dem Lehrstuhl für Photogrammetrie und Kartographie der Technischen Hochschule München unter Prof. Dr. Finsterwalder abgehalten. Diesmal war eine deutliche Zweiteilung des Vortragsprogrammes bemerkbar. Der erste Teil befaßte sich mit den theoretischen und praktischen Voraussetzungen der Luftbildphotographie von der Aufnahme bis zur Kopien- und Diaherstellung, der zweite Teil war den verschiedenen Auswerteverfahren und Anwendungsgebieten gewidmet.

Zum ersten Teil kann jetzt abschließend gesagt werden, daß einesteils neue Erkenntnisse der Einschätzung von Wetterbedingungen, Emulsionsverhältnissen vom Gebiet der Meteorologie und Geodäsie zusammengefaßt und für Luftbildaufnahmen die entsprechenden Gesetze daraus abgeleitet wurden. Die neuesten Forschungsergebnisse der Labors großer Photofirmen wurden den Teilnehmern vermittelt und aufgezeigt, welche Veränderungen sich schon im belichteten Bromsilberkorn ergeben und wie sie auf die entsprechend angewendeten Entwickler (Rapid- oder Feinkorn-Entwickler) reagieren. Als Kriterium wurden nicht, wie üblich, die schwer zu definierenden Ausdrücke Brillanz, Klarheit, Auflösungsvermögen usw. genommen, sondern der Kontrast und damit die Kontrastübertragung als eine Funktion verschiedener variabler Faktoren neu zu bilden versucht, ein Versuch, der sich auch mit den Bemühungen des ITC in Delft deckt, das unabhängig davon den Kontrast als maßgebliches Kriterium für die Beurteilung des Luftbildes festgelegt hat.

Der Vortrag „Definition und Ermittlung von Gütemerkmalen" ließ ebenfalls erkennen, daß es derzeit nicht möglich ist von verschiedenen Werken oder Organisationen gleichgeartete Gütebezeichnungen für ein und dieselbe Luftbildaufnahme zu erhalten. Auch auf diesem Gebiete tritt man für eine Normung ein, um den Praktiker einheitliche Maßstäbe für seine Arbeiten in die Hand zu geben.

Ein weiterer Vortrag befaßte sich mit den Steuerungen des photographischen Kontrastes einerseits durch differenzierte Entwicklung, andrerseits durch geeignete Wahl von elektronischen Kopiergeräten (Cintel, Log Etronic), die einen automatischen Ausgleich in der Kopie bzw. im Dia