Zur Frage der Geoidgestalt in Österreich

Josef Litschauer [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **41** (6), S. 161–172

1953


```
@ARTICLE{Litschauer_VGI_195317,
Title = {Zur Frage der Geoidgestalt in {\"O}sterreich},
Author = {Litschauer, Josef},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {161--172},
Number = {6},
Year = {1953},
Volume = {41}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppe Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie
REDAKTION:
Hofrat Prof. Dr. h. c. mult. E. Doležal,
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. ö. Professor Dipl.-Ing. Dr. H. Rohrer

Nr. 6 Baden bei Wien, Ende Dezember 1953 XLI. Jg.

Zur Frage der Geoidgestalt in Österreich

Von Dr. Josef Litschauer, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

I. Einleitung

Das astronomische Nivellement gibt bekanntlich die Möglichkeit, Aussagen über die Form des Geoides zu gewinnen. Gehen wir von einem bestimmten Punkt P_N der natürlichen Erdoberfläche aus, so gelangen wir einerseits entlang der Lotlinie zu dem entsprechenden Punkt P_G des Geoides, andererseits entlang der Ellipsoidnormalen zu dem Punkt P_E eines passend gewählten Referenzellipsoides. Nun wird einerseits durch astronomische Messungen in P_N die örtliche Lotrichtung bestimmt, die wegen der geringen Krümmung der Lotlinie nur wenig von der Lotrichtung in P_G abweicht, andererseits ist durch die Triangulierungsarbeiten mit anschließender Koordinatenberechnung in dem jeweils vorliegenden Landessystem die Lage von P_E bekannt und damit die Richtung der betreffenden Ellipsoidnormalen. Daraus folgt als Winkel zwischen den genannten Richtungen die örtliche Lotabweichung und diese ist wieder gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalebenen. Man kennt also wenn schon nicht die Lage, so doch die Stellung des Geoidflächenelementes in P_G gegenüber dem Ellipsoidflächenelement in P_E.

Werden nun mehrere Beobachtungsorte P_N so nahe aneinander gewählt, daß die zugehörigen Flächenelemente als benachbart angesehen werden können, so läßt sich daraus mit großer Sicherheit eine zusammenhängende Fläche ableiten. Absolut verwendbar ist dabei nur die Gestalt des gewonnenen Geoidstückes, während Lage und Richtung von den mehr oder weniger willkürlich gewählten Grundlagen der Triangulierungsberechnungen abhängen. Einzelheiten können hier übergangen werden, da die Verfahren und die wichtigsten ausgeführten Arbeiten dieser Art vor zwei Jahren[1]) in dieser Zeitschrift behandelt worden sind.

[1]) K. Ledersteger: Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großenhain-Kremsmünster-Pola, Ö. Z. f. V., 1951, Nr. 2—4.

Die Durchführung stößt in der Praxis auf äußere Schwierigkeiten, so daß die Zahl der astronomischen Beobachtungen und damit der Umfang der Ergebnisse sehr beschränkt ist. Als Notlösung wurden die Beobachtungspunkte entweder statt netzartig nur linienweise angeordnet, insbesondere in nord-südlich verlaufenden Linien, so daß dann auch das Resultat statt aus einem Flächenstück nur aus Linien besteht, aus Geoidprofilen, meist ohne daß über die Nachbarschaft oder auch nur über die Querneigung der Fläche entlang des Profiles etwas ausgesagt werden könnte. Oder es wurde wohl die netzartige Anordnung der Beobachtungspunkte beibehalten, aber auf die enge Nachbarschaft verzichtet. In diesem Falle müssen die beträchtlichen Zwischenräume durch möglichst wirklichkeitsnahe Interpolationshypothesen überbrückt werden.

Die bisherigen Arbeiten der zweiten Gruppe verfolgen das Ziel, für die Beobachtungspunkte Geoidhöhen gegenüber einem Rotationsellipsoid zu ermitteln, ohne auf die Gestalt des Geoides selbst weiter einzugehen. Hier scheint aber eine Weiterführung möglich derart, daß von vorne herein das Geoid als Fläche das Ziel ist und Angaben über einzelne Punkte oder Linien nur als Zwischenwerte im Laufe der Entwicklungen verwendet werden. Die Geoidfläche wird dann wie eine Geländefläche durch Schichtenlinien dargestellt. Dadurch werden zwei Vorteile erreicht: Das Ergebnis ist in allen Teilen anschaulich und es können verschiedene Arbeiten, auch Profilbestimmungen, in einer zusammenhängenden Darstellung ausgewertet werden, so daß mit einem Blick zu erkennen ist, ob etwa einzelne Messungen mit anderen in Widerspruch stehen oder ob an einzelnen Stellen noch zusätzliche Messungen wünschenswert sind. Im folgenden soll nun eine solche Darstellung hergeleitet werden.

II. Ein Geoidmodell als Lösung einer geometrischen Aufgabe

Als Grundlage der Untersuchungen dienen die Lotabweichungen ξ_i, η_i an möglichst vielen und möglichst gleichmäßig über das Arbeitsgebiet verteilten Punkten P_i, deren Lage durch ihre geographischen Koordinaten φ_i, λ_i gegeben ist. Wir wissen somit vom Geoid nur, daß es eine Niveaufläche ist, deren Flächennormalen in den Punkten P_i die durch ξ_i, η_i festgelegten Richtungen haben, und stellen uns die Aufgabe, eine Fläche derart aufzubauen, daß ihre Normalen in P_i genau die eben erwähnten Richtungen haben und daß auch die sonstigen Eigenschaften dieser Fläche möglichst gut mit denen einer Niveaufläche übereinstimmen. Dieses „möglichst gut“ wird bei Bedarf in zweckmäßiger Form analytisch oder geometrisch zu definieren sein.

Es bedeutet keine prinzipielle Vernachlässigung, sondern nur eine vereinfachte Ausdrucksweise, wenn die gesuchte Fläche statt in einem absoluten Koordinatensystem nur in Bezug auf ein bestimmtes Rotationsellipsoid festgelegt wird. Wir denken uns daher das Ellipsoid in eine Ebene und das Geoid so abgebildet, daß die Punkte P_G unter Beibehaltung ihrer Höhe über dem Ellipsoid in die Ordner über den Bildpunkten der zugehörigen Punkte P_E gelangen. Über die Berechtigung, P_G mit P_N und P_E lagemäßig gleichzusetzen, siehe z. B. Vening-Meinesz[2]). Die

[2]) F. A. Vening-Meinesz: On the basic principles of geodesy, Bulletin géodésique, N. S. Nr. 21, 1951.

Punktlagen, Punkthöhen und Horizontalrichtungen sind dabei also gewahrt, die Neigungen beziehen sich aber auf das jeweilige Ellipsoidelement und die Krümmung jedes Flächenschnittes dieser Darstellung ist um die des zugehörigen Ellipsoidbogens kleiner als die absolute Krümmung. Zur Unterscheidung vom unbekannten wahren Geoid soll die gesuchte Ersatzfläche nur als Modell angesprochen werden.

Von den Niveauflächen ist bekannt[3]), daß sie punktweise und tangentenweise stetig sind, während sich die Krümmung am Übergang zwischen Massen verschiedener Dichte sprunghaft ändert. Eine analytische Darstellung ist daher nicht im ganzen, sondern nur stückweise möglich. Demgemäß soll auch die Modellfläche stückweise aufgebaut werden, sie soll die erwähnte zweifache Stetigkeit aufweisen und auch ihre Krümmung soll solange als stetig und sogar konstant eingeführt werden, als nicht andere Forderungen entgegenstehen. Das Gesamtgebiet wird in Dreiecksmaschen zerlegt, indem nach Art eines Triangulierungsnetzes Verbindungslinien zwischen den Punkten P_i gezogen werden. Es kommt dabei nur auf eine möglichst regelmäßige Flächenzerlegung an, ohne Rücksicht darauf, ob die gewählten Verbindungslinien bei der Triangulierung als Sichten verwendet worden oder als solche überhaupt möglich sind. Linienkreuzungen sind zu vermeiden; bei der Wahl zwischen zwei einander kreuzenden Linien ist diejenige beizubehalten, die den kürzesten der vier Abschnitte enthält, die durch den Kreuzungspunkt gebildet werden.

Von den nunmehr in eindeutiger Weise hergestellten Maschen werden zuerst die Ränder, also die Schnitte längs der Dreieckseiten, behandelt. Zerlegen wir im Anfangspunkt P_i und im Endpunkt P_K die Lotabweichungen in ihre Längs- und Querkomponenten, wobei die letzteren vorläufig nicht gebraucht werden, so ist von dem Profil die Neigung β_{iK} am Beginn und ε_{iK} am Ende bekannt. Die nötigen Formeln sind bekannt und seien nur der Vollständigkeit halber zusammengestellt:

$$\triangle\varphi_{iK} = \varphi_K - \varphi_i \;, \quad \triangle\lambda_{iK} = \lambda_K - \lambda_i \;, \quad 2\,\varphi_m = \varphi_i + \varphi_K \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\triangle m = \triangle\varphi'' \cdot s_m \;, \quad \triangle p = \triangle\lambda'' \cdot s_p \qquad \ldots \quad (2)$$

s_m, s_p ... Länge einer Meridian-, bzw. einer Parallelkreissekunde in der Breite φ_m

$$s^2 = \triangle m^2 + \triangle p^2 \qquad \ldots \quad (3)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_m = \triangle p / \triangle m \;, \quad 2\,\triangle\alpha = \triangle\lambda\,\sin\varphi_m \qquad \ldots \quad (4)$$

$$\alpha_{iK} = \alpha_m - \triangle\alpha \;, \quad \alpha_{Ki} = \alpha_m \pm 180^0 + \triangle\alpha \qquad \ldots \quad (5)$$

$$\sigma_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 \;, \quad \mathrm{tg}\,\mu_i = \eta_i / \xi_i \qquad \ldots \quad (6)$$

$$\gamma_{iK} = \alpha_{iK} - \mu_i \;, \quad \gamma_{Ki} = \alpha_{Ki} \pm 180^0 - \mu_K \qquad \ldots \quad (7)$$

Eine in die Profilrichtung fallende positive Lotabweichungskomponente bedeutet, daß der obere Ast der Lotlinie vorwärts, die dazu senkrechte Profillinie also abwärts geneigt wird; wenn wir daher β und ε gleich als Neigungswinkel auffassen, ist ihr Vorzeichen gegenüber den Lotabweichungskomponenten umzukehren:

$$\beta_{iK} = -\sigma_i \cos\gamma_{iK} = -\xi_i \cos\alpha_{iK} - \eta_i \sin\alpha_{iK} =$$
$$= -\xi_i \cos\alpha_m - \eta_i \sin\alpha_m + \triangle\alpha\,(\eta_i \cos\alpha_m - \xi_i \sin\alpha_m) \;. \quad \ldots \quad (8)$$

[3]) A. Wangerin: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Leipzig und Berlin, 1921.

$$\varepsilon_{iK} = -\sigma_K \cos \gamma_{Ki} = \xi^K \cos \alpha_{Ki} + \eta \sin \alpha_{Ki} =$$
$$= -\xi_K \cos \alpha_m - \eta_K \sin \alpha_m + \blacktriangle\alpha\,(\xi_K \sin \alpha_m - \eta_K \cos \alpha_m) \quad . \; . \; . \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\xi_i \frac{\triangle m}{s} - \eta_i \frac{\triangle p}{s} + \triangle\alpha \, . \, q_{iK} \\ \varepsilon &= -\xi_K \frac{\triangle m}{s} - \eta_K \frac{\triangle p}{s} + \triangle\alpha \, . \, q_{Ki} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

q_{iK} und q_{Ki} bezeichnen die Klammerausdrücke in (8) und (9) und sind aus einer ohnehin anzulegenden graphischen Darstellung der Ausgangswerte rasch und genügend genau abzugreifen. Es wäre übrigens kein wesentlicher Fehler, sie überhaupt wegzulassen; in dem angeschlossenen Zahlenbeispiel erreichte das letzte Glied der Gleichungen (10) höchstens 0,1″, der Einfluß auf die Höhenberechnung war höchstens 2 *cm*.

β, ε und s sind vorläufig die einzigen Bestimmungsstücke der Profillinie. Die einfachste unter den möglichen Formen ist geometrisch der Kreisbogen, analytisch der Parabelbogen, die beide wegen der geringen Krümmung hier praktisch zusammenfallen. Zur Erreichung einer symmetrischen Darstellung beziehen wir den Bogen auf ein Koordinatensystem in der Profilebene mit dem Ursprung in der Profilmitte:

$$y = ax + bx^2 \quad . \; . \; . \quad (11)$$
$$y' = a + 2\,bx \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Durch Einsetzen von $x = \mp s/2$ erhalten wir die Neigungen in P_i und P_K

$$y'_i = a - bs = \beta/\rho \quad , \quad y'_K = a + bs = \varepsilon/\rho \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Daraus
$$a = \frac{\beta + \varepsilon}{2\,\rho} \quad , \quad b = \frac{\varepsilon - \beta}{2\,\rho s} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

also
$$y = \frac{\beta + \varepsilon}{2\,\rho}\, x + \frac{\varepsilon - \beta}{2\,\rho s}\, x^2 \quad . \; . \; . \quad (15)$$

Diese Gleichung verwenden wir vorerst nur zur Ermittlung des Ordinatenunterschiedes zwischen Anfangs- und Endpunkt

$$\triangle y_{iK} = y_K - y_i = \frac{\beta + \varepsilon}{2\,\rho}\, s \quad . \; . \; . \quad (16)$$

Werden diese Ordinatenunterschiede bei allen vorgesehenen Verbindungslinien berechnet und dann maschenweise zusammengestellt, so sollte für jedes Dreieck die Summe gleich Null sein. Im allgemeinen wird dies nicht der Fall sein, sondern ein Widerspruch

$$w_{iKl} = \triangle y_{iK} + \triangle y_{Kl} + \triangle y_{li} \quad . \; . \; . \quad (17)$$

auftreten, der durch die allzu starke Vereinfachung der Profilkrümmung verursacht wird. Um den Fehler wett zu machen, überlagern wir dem Kreisbogen (15) eine Kurve nächsthöherer, also dritter Ordnung

$$u = \bar{a}x + \bar{b}x^2 + \bar{c}x^3 \quad . \; . \; . \quad (18)$$

deren Koeffizienten aber so beschaffen sein müssen, daß die Profilneigung an den Grenzen nicht verändert wird:

$$u' = \bar{a} + 2\bar{b}x + 3\,\bar{c}x^2 \quad \ldots (19)$$

$$\left.\begin{aligned} u'_i &= \bar{a} - \bar{b}s + 3\,\bar{c}\,s^2/4 = 0 \\ u'_K &= \bar{a} + \bar{b}s + 3\,\bar{c}\,s^2/4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (20)$$

Diese beiden Bedingungen erfüllt z. B. der Ansatz

$$\bar{a} = 3\,c\,s^2/2 \quad , \quad \bar{b} = 0 \quad , \quad \bar{c} = -2\,c \quad \ldots (21)$$

Somit

$$z = y + u = \frac{\beta + \varepsilon}{2\,\rho}\,x + \frac{\varepsilon - \beta}{2\,\rho s}\,x^2 + c\left(\frac{3}{2}\,s^2x - 2\,x^3\right) \quad \ldots (22)$$

Hierin ist c noch unbestimmt. Setzen wir wieder $x = \mp\, s/2$ und subtrahieren, so entsteht der Höhenunterschied

$$\triangle z_{iK} = z_K - z_i = \frac{\beta + \varepsilon}{2\,\rho}\,s + cs^3 \quad \ldots (23)$$

Nun stellen wir wieder die zu einem Dreieck gehörigen Werte zusammen und erhalten die Bedingungsgleichung

$$\triangle z_{iK} + \triangle z_{Kl} + \triangle z_{li} = 0 \quad \ldots (24)$$

oder unter Verwendung von (23), (16) und (17)

$$w_{iKl} + c_{iK}\,s^3_{iK} + c_{Kl}\,s^3_{Kl} + c_{li}\,s^3_{li} = 0 \quad \ldots (25)$$

Den drei Koeffizienten c sind daher solche Werte beizulegen, daß die Gleichung (25) erfüllt wird; dann bekommen die drei Profile durch die dreimalige Anwendung der Gleichung (22) solche Formen, daß das Dreieck $P_i\,P_K\,P_l$ widerspruchsfrei schließt. Durch (25) allein sind die c-Werte aber noch nicht eindeutig bestimmt, man wird also Nebenbedingungen einführen müssen, und zwar so, daß die Abweichungen der Profilkurven von der Kreisbogenform möglichst gering bleiben. Da die Zahlen s^3 in (25) sämtlich positiv sind, werden die c-Werte am kleinsten, wenn sie untereinander gleich gesetzt werden. Das ist somit die nächstliegende Lösung, wenn nur ein Dreieck vorliegt. Sind mehrere aneinanderschließende Dreiecke zu behandeln, wird jedem davon ein eigener Wert $C^{(i)}$ zugeordnet, der in die Gleichungen der drei Seiten dieses Dreieckes eingeht. Wenn wir jedes Dreieck im gleichen Sinn umfahren, wird jede im Inneren des Arbeitsgebietes liegende Seite in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen; die Anteile aus den beiden Dreiecken wirken also einander entgegen: $c = C^{(i)} - C^{(K)}$ . . . (26)
Mit diesen Ansätzen ist für jedes Dreieck eine Gleichung (25) aufzustellen.

Es ist nun sehr interessant, daß das daraus hervorgehende Gleichungssystem genau so gebaut ist wie das Normalgleichungssystem einer Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit C als Korrelaten und daß eine solche Parallelität auch in den übrigen Stadien hergestellt werden kann. Die Ordinatenunterschiede $\triangle y$, die keineswegs direkt beobachtet sind und deren Ungenauigkeit nur ganz unwesentlich von den Messungsfehlern der Lotabweichungen herrührt, können rein formal als unabhängige Beobachtungen aufgefaßt werden, denen Verbesserungen (nämlich cs^3)

nach der Methode der kleinsten Quadrate zugeteilt werden und die dann als ausgeglichene Werte die Höhenunterschiede $\triangle z$ ergeben. Die Gewichte sind dabei umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernungen. Tatsächlich wurden die in der Einleitung erwähnten früheren Höhenberechnungen von vornherein als Ausgleichungsaufgaben behandelt, ohne die geometrischen Folgerungen zu beachten. Leider ist dort nicht zu ersehen, ob die Gewichte dabei nur in äußerlicher Analogie zur trigonometrischen Höhenbestimmung umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernungen genommen worden sind oder ob andere Gründe dafür vorliegen. Untersuchen wir also, welche Fehlertheorie den fingierten Beobachtungen beizulegen wäre.

Direkte Angaben über die Ordinaten oder ihre Unterschiede nach Art eines geometrischen Nivellements stehen nicht zur Verfügung. Angaben über die Neigung nach Art der trigonometrischen Höhenbestimmung sind nur als Randbedingungen vorhanden, in den Zwischenpunkten ist die Neigung a priori unbestimmt, nicht einmal Häufigkeitsstellen sind angebbar. Erst für die Krümmung können Wahrscheinlichkeitssätze aufgestellt werden ähnlich den für Beobachtungsfehler gültigen. Für die Anwendung dieser Sätze sind zwei Extreme denkbar: Erstens kann man annehmen, daß sich die Krümmung längs einer Profillinie völlig linear ändert und daß die Krümmungsmaxima der einzelnen Profile nur von der unterirdischen Massenverteilung, nicht aber von der Profillänge abhängen; die Ausgleichung ist dann so zu führen, daß die Quadratsumme der untereinander gleichgewichtigen Krümmungsmaxima ein Minimum wird, und das ist zahlenmäßig dasselbe, wie wenn bei dem üblichen Verfahren den fingierten Beobachtungen $\triangle y$ die Gewichte $1/s^4$ beigelegt werden. Im anderen Fall kann man annehmen, daß an den einzelnen Profilelementen die Krümmung völlig unregelmäßig wechselt so wie der wahre Fehler einer Reihe direkter Beobachtungen; die weitere Verfolgung dieser Annahme ähnelt sehr der Fehlertheorie eines beiderseits richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzuges und führt für $\triangle y$ auf die Gewichte $1/s^2$. In Wirklichkeit wird keiner dieser beiden Grenzfälle zutreffen. Die Potentialtheorie lehrt ja, daß die Krümmung der im Erdinneren verlaufenden Niveauflächen nur stellenweise sprunghaft wechselt, sich in den dazwischenliegenden Bereichen aber stetig ändert. Wenn also das tatsächliche Verhalten der Krümmung zwischen den vorhin angeführten Extremen liegt, ist dasselbe Verhältnis auch für die Gewichtbestimmung anzustreben. Die Festlegung mit $1/s^3$ ist daher der zweckmäßigste Mittelwert, so daß damit der frühere Ansatz auf ganz anderem Wege bekräftigt ist.

Nachdem so die Ausgangspositionen klargestellt sind, kann die weitere Rechnung glatt den bewährten Bahnen des Ausgleichungsalgorithmus folgen. Das Ergebnis sind die Verbesserungen cs^3 und damit die Koeffizienten c. Damit erhalten wir einerseits aus (23) die Höhenunterschiede und weiter die Modellhöhen z_i der Beobachtungspunkte in Bezug auf einen willkürlich gewählten Horizont, andererseits aus (22) die Gleichungen der Profillinien und damit Modellhöhe und Längsneigung für jeden Profilpunkt. Die Flächenneigung senkrecht zur Profilrichtung ist vorerst nur in den Profilenden bekannt; da sie die Dreiecksschlüsse nicht berührt, können wir für die Interpolation entlang der Profillinie die einfachste Form verwenden, die lineare Änderung.

Nunmehr ist das Arbeitsgebiet von einem Netz vollständig bestimmter Flächenstreifen überdeckt und es fehlt nur noch, die Modellhöhen im Inneren der Dreiecksmaschen zu interpolieren. Eine geschlossene Formel dafür wäre zu umständlich, ein graphisches Verfahren führt rasch und mit völlig ausreichender Genauigkeit zum Ziel. In der Kartenebene werden die Beobachtungspunkte in einer geeigneten Projektion aufgetragen und maschenweise verbunden. In die Verbindungsgeraden werden aus der Profilauswertung die Durchstoßpunkte der Schichtenlinien eingetragen; für diese Punkte können auch die Längs- und Querneigung im Profil festgestellt und damit Streichen und Fallen der Modellfläche, also Richtung und Anlage der Schichtenlinien angegeben werden. Dadurch sind an den Rändern jeder Masche genügend viele Ansätze gegeben, um die Schichtenlinien in glattem Zuge durch das Mascheninnere durchzuführen und damit die Darstellung des gesamten Arbeitsgebietes lückenlos abzuschließen.

III. Anwendung auf den Raum von Österreich

Das im vorigen Abschnitt beschriebene Verfahren ist in den Jahren 1948/49 versuchsweise auf ein damals vorliegendes System von 66 Punkten angewendet worden, das die östliche Hälfte Österreichs größtenteils überdeckt, die westliche aber nur mit einer einfachen oder Doppel-Kette durchzieht. Nachdem nun im Sonderheft 12 dieser Zeitschrift[4]) eine größere Anzahl von Lotabweichungsmessungen in einem einheitlichen System zusammengestellt worden sind, war damit das Material gegeben, um die Arbeit mit besserer Überdeckung für das Gebiet von Österreich zu wiederholen. Die folgende Tabelle 1 enthält Nummer und Namen der verwendeten Punkte in der Reihung von West nach Ost, ferner die Seite des SH. 12, wo die Daten des betreffenden Punktes enthalten sind.

Tabelle 1

Nr.	Name	SH	ξ	η	H
1	Hersberg	47	− 5,36	− 3,11	31,86
2	Gäbris	47	+ 7,30	− 1,76	32,35
3	Offingen	47	− 0,06	− 0,79	32,54
4	Pfänder	47	+ 1,94	−15,58	32,92
5	Änger	49	+ 5,45	− 6,86	33,62
6	Stanskogel	50	+ 5,36	+ 0,22	36,77
7	Grünten	49	+11,08	− 9,24	34,70
8	Hochvogel	50	+10,96	−13,90	36,05
9	Kirchheim	49	− 0,49	− 1,57	33,49
10	Rothbleißkopf	50	+ 9,58	− 3,28	37,50
11	Muttekopf	50	+ 4,93	− 1,69	36,89
12	Glockturm	50	+ 8,55	−22,06	38,79

[4]) K. Ledersteger: Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen, Sonderheft 12 der Ö. Z. f. V., 1951.

Nr.	Name	SH	ξ	η	H
13	Hohe Geige	50	+ 9,23	— 7,06	39,39
14	Birchkogel	50	+19,72	—21,48	37,99
15	Hohenpeissenberg	49	+ 4,49	+ 3,14	34,29
16	Habicht	50	+12,14	+16,39	39,74
17	Sigmundskron	50	— 2,84	— 3,85	41,29
18	Saile	50	+17,88	+24,79	38,41
19	Ödkarspitze	50	+15,17	— 9,26	36,08
20	München	49	+ 0,83	+ 3,52	32,45
21	Gilfersberg	50	+20,61	+12,94	36,41
22	Rofan	50	+ 8,86	+13,84	34,96
23	Wendelstein	49	+15,13	+ 2,56	32,99
24	Hütteltalkogel	50	+22,09	— 2,39	36,29
25	Rettenstein	50	+15,04	— 0,51	34,90
26	Großglockner	50	+ 2,91	+ 3,49	36,03
27	Asten	49	+ 0,26	— 3,15	31,92
28	Birnhorn	50	—11,58	+ 4,48	34,59
29	Reißrachkopf	50	+12,11	+ 7,33	34,82
30	Sonnblick	50	+13,65	+ 2,30	35,79
31	Haunsberg	49	+ 4,46	— 7,45	32,71
32	Hochkönig	50	— 3,22	— 0,12	34,34
33	Ankogel	50	+ 4,24	— 5,77	35,68
34	Steiglberg	49	+ 3,04	— 0,64	32,50
35	Mosermandl	50	+ 3,25	— 7,89	35,56
36	Schafberg	50	+15,46	— 7,64	33,86
37	Hochschachen	49	— 4,02	— 4,76	32,66
38	Großwand	50	+13,63	— 8,66	35,46
39	Hofbrunn	49	+ 2,43	— 5,87	32,71
40	Hochgolling	50	— 8,27	— 4,14	36,27
41	Kubany	49	+ 3,14	+ 3,96	34,28
42	Traunstein	50	+14,48	— 5,01	34,13
43	Mairhofberg	49	— 9,50	— 5,64	33,67
44	Golica	50	+ 3,82	— 2,05	36,70
45	Großer Priel	50	+14,43	— 1,34	35,69
46	Blegos	50	— 7,52	— 0,37	36,39
47	Kremsmünster	49	+ 4,56	— 1,91	33,69
48	Liezen	50	— 1,45	— 3,10	36,53
49	Hochbuchberg	49	+10,51	— 7,09	34,54
50	Kleinmünchen	49	— 3,57	— 5,67	34,01
51	St. Peter	50	— 2,71	— 1,83	36,83
52	Großer Pyhrgass	50	+ 7,80	— 5,14	36,45
53	Bösenstein	50	—10,88	+ 1,20	36,56
54	Krimberg	50	+ 4,89	+ 1,72	36,34

Nr.	Name	SH	ξ	η	H
55	Zirbitzkogel	50	— 1,40	— 3,24	37,03
56	Kohout	49	+ 5,46	— 2,12	34,67
57	Vetrnik	49	+ 3,03	— 1,50	34,12
58	Viehberg	49	— 0,68	+ 3,18	34,90
59	Saualpe	50	— 1,64	— 2,60	37,03
60	Spindeleben	49	+ 7,91	— 9,03	35,23
61	Lugauer	50	+21,88	+ 4,34	37,04
62	Voralpe	50	+ 6,30	— 9,60	36,02
63	Hochschwab	52	+ 4,17	— 0,81	36,95
64	Ötscher	52	+ 7,59	— 9,26	36,47
65	Jauerling	52	— 0,96	+ 0,66	35,21
66	Schöckl	52	— 3,28	+ 1,71	37,02
67	Bacher	52	— 0,99	+10,95	36,84
68	Kranichfeld	52	— 3,39	+10,80	36,11
69	Hora	51	+ 2,38	+ 1,72	34,92
70	Donati	52	— 0,12	— 0,46	35,80
71	Schneeberg	52	+ 8,89	+ 3,94	36,53
72	Wurmberg	52	— 4,15	+ 1,70	35,83
73	Wechsel	52	— 0,73	+ 4,45	36,74
74	Schöpfl	52	+ 6,64	+ 2,92	35,44
75	Hochstraden	52	+ 3,05	— 0,46	36,18
76	Spittlmais	52	— 2,23	+ 4,53	34,63
77	Kamenek	52	— 3,05	+ 4,61	35,94
78	Wiener Neustadt	52	+ 6,17	+ 7,29	35,46
79	Anninger	52	+ 0,21	+ 9,27	34,87
80	Rapotič	51	— 1,64	+ 6,62	34,24
81	Hermannskogel	52	+ 1,93	+ 5,58	34,38
82	Rosalienkapelle	52	+ 7,79	+ 7,01	35,56
83	Güssing	52	— 1,16	+ 7,20	35,91
84	Buschberg	52	+ 0,72	+ 4,64	33,86
85	Laaerberg	52	+ 4,56	+ 8,07	34,30
86	Geschriebenstein	52	+ 0,07	+ 5,35	35,78
87	Sonnenberg	52	+ 3,08	+ 2,33	34,71
88	Czarhalom	52	+ 3,57	+ 6,57	34,81
89	Maydenberg	51	— 0,04	+ 7,13	33,24
90	Gestenyes	52	+ 0,46	+ 2,08	35,26
91	Hundsheimer	52	+ 4,46	— 0,74	33,72
92	Saghegy	52	+ 2,74	+ 4,71	34,78
93	Magoshegy	52	+ 5,48	+ 2,15	33,76
94	Lopenik	51	+ 0,80	— 1,75	32,60
95	Zobor	52	— 0,91	— 2,35	32,96
96	Kaponikai	52	+ 3,12	+ 0,51	33,10

Wie die beigegebene Abbildung zeigt, wurden 65 Punkte innerhalb und 31 außerhalb der Grenzen Österreichs einbezogen; es war dabei beabsichtigt, das Netz soweit auszudehnen, daß eine zusammenhängende Darstellung über das ganze Staatsgebiet möglich ist. Dieses Ziel konnte im Norden und Osten erreicht werden nur in West-Kärnten, Ost- und Südwest-Tirol und Süd-Vorarlberg bestehen Lücken. Sie werden erst durch die im Zuge befindlichen Neumessungen geschlossen werden. Willkürlich ausgelassen wurde kein Punkt.

Nach den früher dargelegten Verfahrensregeln wurden Dreiecksmaschen gebildet und für alle Verbindungen Entfernung und Azimut gemäß (1) bis (5) gerechnet. Die Seitenlängen liegen zwischen 10 und 112 *km*, das Mittel ist 46 *km*.

Die Lotabweichungen sind im SH 12 im System des Reichsdreiecksnetzes gegeben, bezogen auf das Bessel'sche Ellipsoid. Um aber die gesuchte Modellfläche gleich in einer möglichst absoluten Orientierung zu erhalten, wurden die Lotabweichungen nach den bekannten Formeln mit

$$\frac{da}{a} = +15\,537 \,.\, 10^{-8} \quad , \quad da = +2423 \,.\, 10^{-8} \quad \ldots \quad (27)$$

vom Bessel'schen auf das internationale (Hayford'sche) Ellipsoid und mit den aus SH 12, Seite 71, entnommenen und für $\varphi_0 = 50^0, \lambda_0 = 15^0$ geltenden Verschiebungen

$$d\varphi_0 = -4{,}295'' \quad , \quad d\alpha_0 = -1{,}274'' \quad \ldots \quad (28)$$

von der Ausgangs- auf die absolute Lage des Dreiecksnetzes transformiert. Eine Verschiebungsgröße in Länge wird nicht gebraucht, da das System nur sehr wenige Laplace'sche Punkte enthält und daher im Interesse einer einheitlichen Behandlung auch bei diesen nur die Azimutmessungen verwendet wurden. Die Ergebnisse der Umformung sind die in Tabelle 1 angeführten ξ und η; sie wurden in einem Netzbild (1:1 Mill.) im Maßstab $1'' \triangleq 1$ *mm* eingetragen und nach (6) bis (10) zur Berechnung der Komponenten, bzw. Profilneigungen β und ε verwendet.

Es folgte die Berechnung der 253 Ordinatenunterschiede $\triangle y$ nach (16) und der Dreieckswidersprüche w nach (17). Einige Angaben über die Größenverteilung enthält die folgende

Tabelle 2

w in *m*	Seitensumme in *km* 50—100	100—150	150—200	200—300	zus.
0—1	40	42	24	12	118
1—2	6	9	8	5	28
2—3	2	2	2	2	8
3—4	—	2	1	1	4
zus.	48	55	35	20	158

Von den 158 Dreiecken hat 79—81—85 mit 56 *km* den kürzesten, 89—91—94 mit 275 *km* den längsten Umfang. Den größten absoluten Widerspruch hat mit 3,33 *m* das Dreieck 59—67—75 bei 225 *km* Seitensumme, den größten relativen mit 2,74 *m* bei 89 *km* das Dreieck 14—18—19.

Als nächstes wurden die 158 Normalgleichungen aufgestellt und nach dem Gauß'schen Algorithmus gelöst; dank den vielen Nullstellen ist diese Arbeit nicht gar so arg, als es auf den ersten Blick scheint. Die damit erhaltenen Korrelaten C ergeben mit (26) und (23) die Höhenunterschiede. Wenn schon die Rechnung als Ausgleichungsaufgabe nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgefaßt wird, liegt es nahe, für die fingierten Beobachtungen $\triangle y$ auch einen mittleren Fehler zu errechnen; er fand sich mit $\pm$ 9 *cm* für eine Seite von 10 *km* oder mit $\pm$ 90 *cm* für die Durchschnittsentfernung von 46 *km*. Dabei trägt zur $[pvv]$ die Seite 14—19 ein Zehntel bei, mit 13—16, 18—21 und 53—61 ist das erste Viertel und mit 9 weiteren die erste Hälfte voll, während die restlichen 240 Beiträge die zweite Hälfte bilden.

Als Ausgangswert für die Höhenberechnung wurde der schon bei Ledersteger[1]), a. a. O. Seite 112, verwendete Betrag von 34,90 *m* für den Punkt 58 (Viehberg) angenommen. Die so erhaltenen Modellhöhen an den Beobachtungspunkten sind in Tabelle 1 angeführt.

Damit war alles vorbereitet, um die 253 Profile zu zeichnen und dabei die gemäß (22) auf die Profilmitte bezogenen Höhen in das allgemeine System zu transformieren. Die zu runden Dezimetern der Höhe gehörigen Punkte wurden in den Profilen aufgesucht und von hier in das oben erwähnte Netzbild übertragen. Ebenso wurde die Längsneigung des Profiles an diesen Punkten in Form einer entsprechenden Lotabweichungskomponente im Netzbild angemerkt; sie gibt mit der zwischen den Profilenden linear interpolierten Querneigung als Resultierende die Gesamtneigung und Fallrichtung in all diesen Punkten, also Linienelemente und Abstand der Schichtenlinien. Schließlich wurden diese Elemente zu möglichst einfach gestalteten zusammenhängenden Kurven verbunden.

Das Ergebnis ist in der beigegebenen Abbildung mit Beschränkung auf Halbmeterschichten dargestellt. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit wurde dabei die geographische Lage nur durch Randmarken und durch die Staatsgrenzen angedeutet.

Die Berechnungen des SH 12 verwenden als absolute Grundlage das sogenannte T a n n i'sche Geoid (a. a. O. Seite 13, bzw. 60), dessen Undulationen aus Schweremessungen hergeleitet sind. Den für dieses Geoid berechneten Lotabweichungen sollten die in den Triangulierungspunkten tatsächlich gemessenen durch eine passende Verschiebung des innereuropäischen Netzverbandes möglichst angenähert werden und die dort gefundenen Verschiebungsgrößen wurden in Form der Elemente (28) auch in die vorliegende Arbeit eingeführt. Es ist also zu erwarten, daß die fertige Modellfläche im Mittel jenem Geoid entspricht und sich von ihm nur durch größeren Detailreichtum unterscheidet. Um die beiden Flächen daraufhin vergleichen zu können, wurden in die Abbildung die Zweimeter-Schichtenlinien des Tanni'schen Geoides gestrichelt eingetragen. Wie man sieht, läßt die Vielfalt der Kleinformen nur schwer eine Ähnlichkeit erkennen. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, daß das Modell um eine Achse in der Gegend Rom-Budapest nur um 0,47″ aufwärts gekippt werden müßte, um die Abweichungen von dem betreffenden Geoidausschnitt zu einem Minimum zu machen. Da jede Neigung der Modellfläche in erster Näherung als Wirkung einer Verschiebung des betreffenden Triangulierungsnetzes aufgefaßt werden kann, entspricht die genannte Kippung einer Netzverschiebung um 0,28″ nach Norden und 0,56″ nach Westen, verbunden mit einer Hebung um 0,72 *m*. Natürlich haben diese Zahlen nur den Wert von Beispielen, da das einbezogene Gebiet nur einen kleinen Ausschnitt des europäischen Netzverbandes darstellt.

Der Erkenntniswert dieser vorläufigen Auswertung soll nicht überschätzt werden. Wie schon erwähnt, war das Ziel ja vor allem, ein anschauliches Bild dessen zu geben, was das Zahlenmaterial der bisherigen Messungen geometrisch bedeutet, oder besser gesagt, bedeuten kann; denn der durch die Interpolation auf weite Entfernungen verursachten Unsicherheit ist nur durch Netzverdichtung beizukommen. Es sei daher darauf verzichtet, die Einzelformen des Modells zu besprechen oder gar ihre geologische Begründung zu versuchen. Als auffällig mag nur die Einsenkung im Unter-Pinzgau infolge der negativen ξ-Werte in 28 und 32 hervorgehoben werden, ferner das isolierte Steilstück im Gebiet Judenburg-Trieben infolge des meridionalen Auseinanderlaufens der Lotabweichungen in 53 und 61. Die gekünstelten Formen ebenso wie die schon vorher angeführten Fälle von hohen Dreieckswidersprüchen und starken Profilverbiegungen deuten entweder auf sehr unregelmäßige unterirdische Massenanordnungen oder auf Fehler in den verwendeten Lotabweichungen. Um solche verdächtige Stellen klar hervortreten zu lassen, ist es ja vermieden worden, irgendwelche Ausgangswerte willkürlich auszuscheiden.

Seit 1950 wurde und wird daran gearbeitet, auch auf den noch fehlenden Triangulierungspunkten erster Ordnung die Lotabweichung zu bestimmen. Die Ergebnisse dieser jüngsten Messungen sind hier noch nicht einbezogen, es wird aber, sobald sie vorliegen, interessant sein, sie mit den hier interpolierten Werten zu vergleichen und weiters die ganze Untersuchung mit einem ergänzten und verdichteten System zu wiederholen. Schließlich wird es angezeigt sein, die im vorigen Absatz angedeuteten gestörten Stellen näher zu erforschen, sei es durch probeweise Neumessung der verdächtigen Einzelwerte, sei es durch zusätzliche Messungen an Punkten niedrigerer Ordnung in jenen Gebieten.

Die Gebäude des Bundesvermessungsdienstes in Wien

Von Karl Lego

(Mit einer Beilage)

Mit Entschließung des Kaisers Ferdinand I. vom 7. Jänner 1839 wurde das Mailänder „Istituto geografico militare", nachdem es seine topographischen Arbeiten in Oberitalien sowie die Küstenaufnahmen des Adriatischen Meeres beendet hatte, nach Wien verlegt und mit der topographischen Anstalt des General-Quartiermeisterstabes zum „K. k. Militärgeographischen Institut" vereinigt [1]).

[1]) Aus der „Instruktion für das militairisch-geographische Institut", die vom Kaiser Ferdinand I. am 23. November 1840 genehmigt wurde:

„Über einen Vortrag des k.k. hochlöblichen Hofkriegsrathes, womit Seiner Majestät der die Anträge des General-Quartiermeisterstabes zur Vereinigung des Mailänder Militair-