

Paper-ID: VGI\_195012



## Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten

Karl Hubeny

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **38** (5–6), S. 103–112

1950

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195012,  
Title = {Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten},  
Author = {Hubeny, Karl},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {103--112},  
Number = {5--6},  
Year = {1950},  
Volume = {38}  
}
```



Wie schon das Vorwort erkennen läßt, ist das von D o l e ž a l vollständig umgearbeitete und erweiterte Werk eine österreichische Geodäsie, die nicht nur bei der Besprechung der Instrumententypen und der Verfahren unsere Verhältnisse berücksichtigt, sondern auch die Katasteraufnahme, die topographische Landesaufnahme, das Präzisionsnivelllement in Österreich eingehend bespricht. Darin und in der klaren, leicht faßlichen Darstellung selbst schwieriger Probleme liegt der unendlich große Wert dieses Buches für uns. Tausende von Bau- und Vermessungsingenieuren haben es als Lehrbuch benützt und für ebensoviele im Beruf ist es ein unentbehrliches Nachschlagewerk geworden. Das Werk, welches die Schule D o l e ž a l verkörpert, ist auch für den Geodäsieunterricht an den technischen Hochschulen in Österreich richtunggebend geblieben. D o l e ž a l s Hand- und Lehrbuch war bald vergriffen und erschien 1909 in neuer Auflage mit einigen Ergänzungen, unter anderem erhielt die Stereophotogrammetrie im Abschnitte Photogrammetrie ein eigenes Kapitel eingeräumt.

Nach dem ersten Weltkrieg ist 1921 eine 11. Auflage von Professor Dr. h. c. D o l e ž a l erschienen, die aus technischen Gründen einen unveränderten Abdruck der 10. Auflage darstellt, doch ist am Schlusse des zweiten Bandes ein Anhang beigefügt, in welchem der zweiteilige Korbbogen, das Photo-Tachymeter von D o l e ž a l - R o s t, der Phototheodolit von Prof. P u l f r i c h sowie der Stereograph aufgenommen erscheinen.

Diese letzte Auflage ist schon seit längerer Zeit vollkommen vergriffen und wir wollen hoffen, daß sich der Altmeister der österreichischen Geodäsie Hofrat Dr. Dr. Dr. h. c. Eduard D o l e ž a l bei seiner geistigen und körperlichen Frische entschließt, die Neubearbeitung des Buches durchzuführen. Die Fachkreise des Inlandes und auch ein nicht unbeträchtlicher Teil des Auslandes würde eine Neuaufgabe dieses Standardwerkes der Niederen Geodäsie mit Begeisterung begrüßen.

Möge dieser Wunsch in Erfüllung gehen!

## **Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten**

Von Prof. Dr. K. H u b e n y, Graz

In einer kürzlich in der „Schweizerischen Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik“ erschienenen Arbeit [1] wird meines Wissens erstmalig auf Aufgaben der Ausgleichsrechnung eingegangen, die sich bei der Ausgleichung von Dreiecksnetzen ergeben, deren Form nur durch gemessene Strecken bestimmt ist. Die folgenden Zeilen sollen eine Erweiterung und Verallgemeinerung dieser Aufgaben in Problemstellung und -lösung bringen.

### 1. Die Bedingungen im Streckennetz.

Wir wollen zunächst einiges über die notwendige Zahl von Bestimmungsstücken in einem flächigen Dreiecksnetz mit gemessenen Strecken aussagen. Die gegenseitige Lage zweier Punkte ist durch eine Strecke bestimmt; zur Festlegung

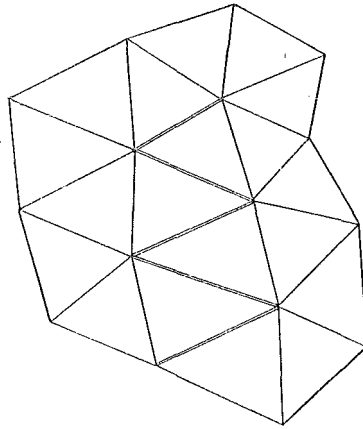
der Lage jedes weiteren Punktes gegenüber den beiden ersten Punkten sind zwei Strecken notwendig. Es wird also die gegenseitige Lage dreier Punkte durch drei, die gegenseitige Lage von vier Punkten durch fünf usw. Strecken bestimmt, woraus sich mit der Streckenzahl  $s$  und der Punktezahl  $p$  für die notwendige Streckenzahl die bekannte Relation

$$s = 2p - 3 \quad (1)$$

ergibt. Ist  $S$  die Gesamtzahl der Strecken, so erhält man die Anzahl der überzähligen Bestimmungsstücke aus

$$\ddot{u} = S - 2p + 3 \quad (2)$$

Das in Abbildung 1 gezeichnete Netz enthält demnach 5 Überbestimmungen, die beispielsweise durch die doppelt gezeichneten Seiten dargestellt sein können. Jede beliebige Verbindung zweier Punkte des Netzes über die schon bestehenden



$$\begin{aligned} P &= 16 \\ S &= 34 \\ (\text{5 „innere“ Punkte}) \\ \ddot{u} &= 34 - 32 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Abb. 1

Verbindungen hinaus liefert eine weitere Überbestimmung. Man erkennt also, daß eine allein durch Aneinanderreihung von Dreiecken entstandene flächige Figur — alle darin vorkommenden Strecken als gegeben vorausgesetzt — bereits Überbestimmungen enthält.

Die Zahl der überschüssigen Bestimmungsstücke kann man übrigens aus einem Netzbild leicht erkennen. Nehmen wir zunächst an, das Netz sei nur aus aneinandergereihten Dreiecken gebildet (keine sich kreuzenden Seiten) und unterscheiden wir zwischen „äußeren“ und „inneren“ Punkten des Netzes (Punkte der Randfigur und Punkte innerhalb derselben), so gibt, wie sich leicht beweisen läßt, die Zahl der „inneren“ Punkte die der überzähligen Bestimmungsstücke an.

Jede Verbindung zweier beliebiger Punkte des Netzes über die frühere Annahme hinaus liefert eine weitere Überbestimmung; ebenso verringert das Weglassen einer Seite des ursprünglichen Netzes die Zahl der Überbestimmungen um eins.

In [1] wird das Diagonaleinvierck als Grundfigur erklärt und behandelt. Es ist natürlich durchaus denkbar und möglich, daß sich bei prinzipieller Einhaltung der üblichen Forderung nach Seiten von nicht allzusehr unterschiedlicher Länge noch andere Figuren bilden lassen, wozu in diesem oder jenem Falle auch die Durch-

führbarkeit der Messung zwingender Grund sein kann. Eine Erweiterung der Grundfigur liegt beispielsweise in einem offenen Zentralsystem mit einer Diagonalen nach Abb. 2 vor. Es zeigt sich aber aus den obigen Überlegungen, daß die An-

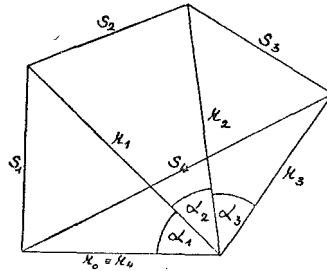


Abb. 2

wendung dieser Grundfiguren wegen der in ihnen enthaltenen Überbestimmung nur in Ketten notwendig ist, während in flächigen Netzen schon allein die Messung der Längen aller Dreiecksseiten zur Überbestimmung führt.

Wir wollen nun jene Figur ermitteln, die eine Behandlung des in überbestimmten Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Strecken vorliegenden Ausgleichsproblems erlaubt und bezeichnen diese Figur als die

2. Allgemeine Grundfigur.

Greifen wir zunächst auf die Abb. 2 zurück. Nach (2) enthält diese Figur eine Überbestimmung z. B. durch die Seite (Diagonale)  $s_4$ . Denken wir uns die Winkel  $\alpha_1 - \alpha_3$  als Funktionen der Strecken  $r_0 - r_3$  und  $S_1 - S_3$  ausgedrückt, so läßt sich aus dem Cosinussatz für das Dreieck  $r_0 s_4 r_3$  sofort eine Bedingung angeben, der die gemessenen Stücke genügen müssen, nämlich

$$S_4^2 = r_0^2 + r_3^2 - 2 r_0 r_3 \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

Vervollständigen wir diese Figur zu einem geschlossenen Zentralsystem nach Abb. 3, so ist diese gleichfalls überbestimmt. Im Falle einer Klaffung (Abb. 3 a) müßte

$$e^2 = r_0^2 + r_4^2 - 2 r_0 r_4 \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$$

sein.

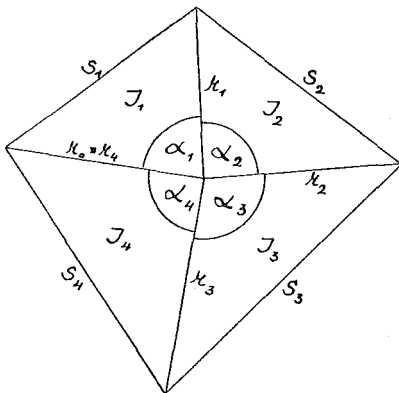


Abb. 3

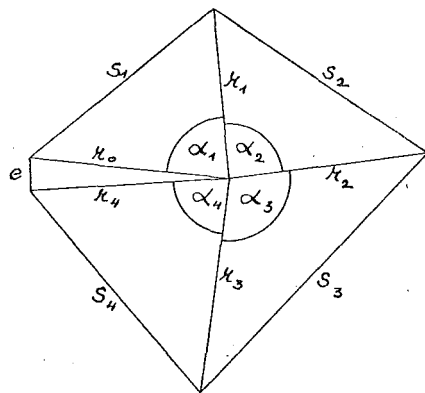


Abb. 3 a

Da aber zufolge der Messung  $r_0 \equiv r_4$  ist und die Figur sich schließen soll ( $e = 0$ ), gilt die einfache Bedingung

$$\cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 1 \quad (3 a)$$

oder

$$\sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0 \quad (3 b)$$

als Bedingungsgleichung im Zentralsystem. Die Lösung dieser Gleichungen ergibt die — auch direkt aus der Figur ablesbare — triviale Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2 \pi = 0 \quad (3 c)$$

Aus den Abbildungen 4 erkennt man, daß bei sinngemäßer Bezeichnung sowohl die in [1] als „Grundfigur“ erklärte Figur als auch deren Erweiterung nach

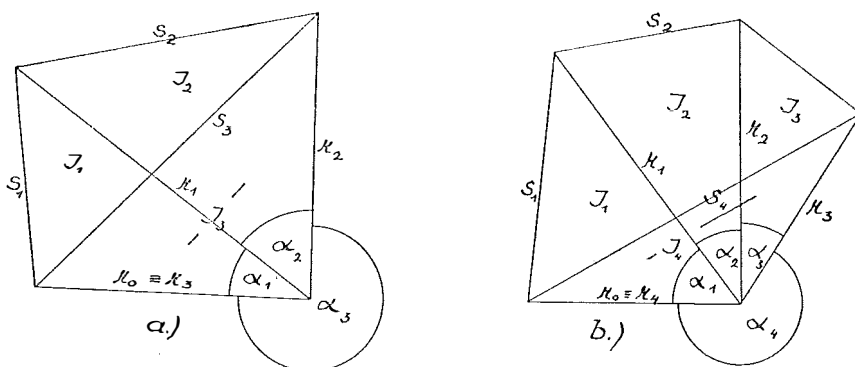


Abb. 4

Abb. 2 die vorhin formulierte Bedingung für das geschlossene Zentralsystem enthält. Die beiden Grundfiguren stellen also je einen durch die Zahl der Bestimmungsstücke oder ihrer Anordnung gekennzeichneten Spezialfall des Zentralsystems dar. Da das Zentralsystem überdies — wie später gezeigt wird — die Grundlage für die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit gemessenen Seiten bildet, wird man dieses mit Recht als allgemeine Grundfigur in Streckennetzen ansprechen dürfen.

### 3. Die Ausgleichung der allgemeinen Grundfigur.

In der Gleichung (3c) finden wir die den Strecken in einem Zentralsystem vorgeschriebene Bedingung, da jeder Winkel  $\alpha_i$  eine Funktion der Strecken  $r_{i-1}$ ,  $r_i$  und  $s_i$  ist (Bezeichnungen nach Abb. 3, bzw. 4); die Gleichung (3c) enthält, in der allgemeinen Form

$$[\alpha_i]_{i=1}^{i=n} - 2 \pi = 0 \quad (3d)$$

angeschrieben, demnach alle Strecken in einem aus  $n$ -Dreiecken gebildeten Zentralsystem.

Wir bezeichnen die in (3d) gegebene Funktion mit  $F$ ; die Bedingung lautet dann

$$F - 2 \pi = 0 \quad (4)$$

Berechnet man die einzelnen Winkel  $\alpha_i$  mit den in der ebenen Trigonometrie gebräuchlichen Formeln aus

$$\sin \alpha_i = \frac{(-r_{i-1}^4 - r_i^4 - s_i^4 + 2 r_{i-1}^2 r_i^2 + 2 r_{i-1}^2 s_i^2 + 2 r_i^2 s_i^2)^{\frac{1}{2}}}{2 r_{i-1} r_i} \quad (5a)$$

oder

$$\cos \alpha_i = \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2 r_{i-1} r_i} \quad (5b)$$

so läßt sich die Bedingung (4) mit (5b) nunmehr ausführlich in der Form

$$\left[ \arccos \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2 r_{i-1} r_i} \right]_{i=1}^{i=n} - 2 \pi = 0 \quad (6)$$

anschreiben. Eine ähnliche Formulierung ist auch mit (5a) möglich, doch erweist sich die letztere Form für die weitere Rechnung als bequemer.

Führt man in (6) die gemessenen Größen  $r_i'$ ,  $s_i'$  ein, so ergibt sich ein Widerspruch; es ist

$$F' - 2 \pi \neq 0 = w \quad (7)$$

Die gemessenen Größen  $r_i'$ ,  $s_i'$  sind daher um die Beträge  $\nu_{r,i}$ ,  $\nu_{s,i}$  so zu verbessern, daß die ihnen vorgeschriebene Bedingung erfüllt ist und daß die Quadratsumme der an ihnen angebrachten Verbesserungen zu einem Minimum wird (Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen, [2]).

Die Auswirkung der (noch unbekanntenen) Verbesserungen auf die Funktion  $F'$  erhalten wir durch deren Entwicklung an der durch die Meß-(Näherungs) Werte gegebenen Stelle; mit den angebrachten Verbesserungen muß die Bedingung (6) wieder erfüllt sein. Daraus folgt

$$F' + \left[ \frac{\partial F'}{\partial r_i} \nu_{r,i} \right]_{i=1}^{i=n} + \left[ \frac{\partial F'}{\partial s_i} \nu_{s,i} \right]_{i=1}^{i=n} - 2 \pi = 0 \quad (8)$$

und weiter, nach Einführung des Widerspruches, die Fehlerbedingungsgleichung

$$\left[ \frac{\partial F'}{\partial r_i} \nu_{r,i} \right]_{i=1}^{i=n} + \left[ \frac{\partial F'}{\partial s_i} \nu_{s,i} \right]_{i=1}^{i=n} + w = 0 \quad (9)$$

Verwenden wir die in der Ausgleichsrechnung üblichen Symbole für die Koeffizienten der einzelnen Verbesserungen, so erhalten wir mit

$$\frac{\partial F'}{\partial r_i} = a_{r,i} \quad \frac{\partial F'}{\partial s_i} = a_{s,i}$$

die allgemeine Form der Fehlerbedingungsgleichung

$$\left[ a_{r,i} \nu_{r,i} \right]_{i=1}^{i=n} + \left[ a_{s,i} \nu_{s,i} \right]_{i=1}^{i=n} + w = 0 \quad (9a)$$

Hieraus folgt, wie bekannt, die Normalgleichung

$$\left[ aa \right] k + w = 0 \quad (10)$$

aus deren Lösung sich die einzelnen Verbesserungen mit

$$\nu_{r,i} = a_{r,i} k \quad \nu_{s,i} = a_{s,i} k \quad (11)$$

ergeben.

#### 4. Die Koeffizienten der Fehlerbedingungsgleichung.

Durch die zuvor gegebene Entwicklung ist der allgemeine Gang der Ausgleichung skizziert; es ist noch notwendig, die Rechnung in ein bequem zu handhabendes Schema zu bringen. Sieht man von der Aufstellung und Auflösung der Normalgleichung ab, so handelt es sich dabei lediglich um die Bildung der partiellen Ableitungen der Funktion  $F$ , also um die Bestimmung der Koeffizienten der Fehlerbedingungsgleichung.

Wir bezeichnen das Argument der Funktion (5b) mit  $c_i$ ; es ist also

$$\alpha_i = \arccos c_i = \arccos \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2 r_{i-1} r_i}$$

Die Bedingungsgleichung in der Formulierung nach (6) lautet damit

$$\left[ \arccos c_i \right]_{i=n}^{i=n} - 2\pi = 0$$

Die partielle Ableitung dieser Funktion nach  $r_i$  ergibt, da  $r_i$  sowohl in  $c_i$  als auch in  $c_{i+1}$  vorkommt,

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = \frac{\partial \arccos c_i}{\partial r_i} + \frac{\partial \arccos c_{i+1}}{\partial r_i}$$

und weiter

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = - \frac{1}{\sqrt{1-c_i^2}} \frac{\partial c_i}{\partial r_i} - \frac{1}{\sqrt{1-c_{i+1}^2}} \frac{\partial c_{i+1}}{\partial r_i}$$

Mit der früheren Festsetzung

$$c_i = \cos \alpha_i \quad c_{i+1} = \cos \alpha_{i+1}$$

und den leicht zu bildenden Ableitungen

$$\frac{\partial c_i}{\partial r_i} = \frac{r_i - r_{i-1} \cos \alpha_i}{r_{i-1} r_i}, \quad \frac{\partial c_{i+1}}{\partial r_i} = \frac{r_i - r_{i+1} \cos \alpha_{i+1}}{r_i r_{i+1}}$$

erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = - \frac{r_i - r_{i-1} \cos \alpha_i}{r_{i-1} r_i \sin \alpha_i} - \frac{r_i - r_{i+1} \cos \alpha_{i+1}}{r_i r_{i+1} \sin \alpha_{i+1}}$$

Die Nenner der obigen Brüche bedeuten jeweils den doppelten Flächeninhalt der Dreiecke mit den Winkeln  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$ ; ihr Vorzeichen ist durch  $\sin \alpha_i, \sin \alpha_{i+1}$  bestimmt. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = \operatorname{sgn} \sin \alpha_i \frac{r_{i-1} \cos \alpha_i - r_i}{2 J_i} + \operatorname{sgn} \sin \alpha_{i+1} \frac{r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - r_i}{2 J_{i+1}} \quad (12a)$$

In gleicher Weise finden wir die partiellen Ableitungen nach  $s_i$ ; da diese Größe jeweils nur im Ausdruck  $c_i$  vorkommt, erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \frac{\partial \arccos c_i}{\partial s_i} = - \frac{1}{\sqrt{1 - c_i^2}} \frac{\partial c_i}{\partial s_i}$$

Mit

$$\frac{\partial c_i}{\partial s_i} = - \frac{s_i}{r_{i-1} r_i}$$

folgt daraus

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \operatorname{sgn} \sin \alpha_i \frac{s_i}{2 J_i} \quad (12b)$$

Man erkennt aus den Formeln (12), daß die Koeffizienten der Bedingungsgleichung für eine aus  $n$ -Dreiecken gebildete Grundfigur völlig schematisch gebildet werden können. Die zahlenmäßige Durchrechnung gestaltet sich äußerst einfach, da die Zähler und Nenner der Formeln (12) durch elementare Konstruktionen einem maßstäblichen Netzbild entnommen werden können.

## 5. Beispiele zur Ausgleichung von Grundfiguren.

### a) Figur nach Abb. 4b

$i$	Gemessen:		Gerechnet: $\alpha_i$
	$r_i$	$s_i$	
1	28 372.8	23 093.8	48° 35' 49.03''
2	26 059.4	26 353.9	57° 43' 38.48''
3	28 164.7	23 035.0	50° 05' 34.19''
4	27 731.6	54 720.0	203° 33' 04.32''

$$[\alpha_i] = 359^\circ 58' 06.02''$$

$$\text{Widerspruch } w = -1' 53.98''$$

$i$	Koeffizienten:		(graphisch bestimmt)
	$a_{ri}$	$a_{si}$	
1	- 4.06	+ 3.92	
2	- 3.18	+ 4.23	
3	+15.10	+ 4.10	
4	+15.60	-17.51	



Auflösung der Normalgleichung:  $k = +0.06466$

$i$	Verbesserte Seiten:		Gerechnet:
	$r_i$	$s_i$	$\alpha_i$
1	28 372.537	23 094.053	48° 35' 48.81''
2	26 059.194	26 354.174	57° 43' 42.85''
3	28 165.676	23 035.265	50° 05' 32.94''
4	27 732.609	54 718.868	203° 34' 55.42''
			$[\alpha_i] = 360^{\circ}00' 00.02''$

b) Figur nach Abb. 3

$i$	Gemessen:		Gerechnet:
	$r_i$	$s_i$	$\alpha_i$
1	18 734.0	27 191.2	80° 00' 35.03''
2	22 473.3	22 998.3	67° 08' 29.87''
3	19 293.5	31 561.7	97° 52' 39.26''
4	23 224.0	35 911.0	114° 56' 57.08''
			$[\alpha_i] = 359^{\circ}58' 41.24''$

Widerspruch  $w = -1' 18.76''$

$i$	Koeffizienten:		(graphisch bestimmt)
	$a_{ri}$	$a_{si}$	
1	- 6.01	+ 6.35	
2	- 9.77	+ 6.08	
3	-12.37	+ 7.35	
4	-12.37	+ 8.84	

Auflösung der Normalgleichung:  $k = +0.05902$

$i$	Verbesserte Seiten:		Gerechnet:
	$r_i$	$s_i$	$\alpha_i$
1	18 733.645	27 191.575	80° 00' 49.47''
2	22 472.723	22 998.659	67° 08' 40.83''
3	19 292.770	31 562.134	97° 53' 00.65''
4	23 223.270	35 911.522	114° 57' 28.99''
			$[\alpha_i] = 359^{\circ}59' 59.94''$

Die zahlenmäßige Durchrechnung der eben mitgeteilten Beispiele stammt von Herrn Dipl.-Ing. Günther Schelling, Assistent am geodätischen Institut der Technischen Hochschule Graz, dem ich an dieser Stelle für seine Mitarbeit in der Erprobung der vorliegenden Ergebnisse herzlich danke.

## 6. Die Anwendung der allgemeinen Grundfigur beim Ausgleich von Streckennetzen.

Unter „Streckennetz“ sei ein Dreiecksnetz verstanden, in welchem die gegenseitige Lage der einzelnen Knotenpunkte durch die Messung ihrer gegenseitigen Entfernungen bestimmt ist. Der gegenwärtige Stand der auf dem Radarprinzip beruhenden Methoden zur Messung großer Entfernungen dürfte wohl die Anlage von Netzen mit Seitenlängen von hundert und mehr Kilometern bedingen, da hiebei günstigere Verhältnisse hinsichtlich der relativen Entfernungsfehler gegeben erscheinen. Aus diesem Grund ist auch kaum anzunehmen, daß in Streckennetzen Diagonalen vorkommen werden, deren Länge einem Vielfachen der einzelnen Dreiecksseite entspricht. Auch wenn man die Anwendung der im letzten Jahrzehnt von Bergstrand entwickelten Methode zur direkten Messung von Entfernungen von 10, 20 und mehr Kilometern mit Hilfe hochfrequent modulierten Lichtes für Zwecke der Triangulation erwägt, gelten kaum andere Voraussetzungen. Man wird die zu messenden Strecken immer möglichst groß wählen, wodurch wegen des doch immer begrenzten Meßbereiches allzu große Unterschiede der einzelnen Strecken von vorneherein ausgeschlossen sind.

Diese Überlegungen lassen den Schluß zu, daß die gemessenen Seiten im Streckennetz etwa das gleiche Bild zeigen dürften, wie wir es von der Darstellung der beobachteten Richtungen im Dreiecksnetz gewohnt sind.

Es zeigt sich nun, daß die Ausgleichung eines derartigen Streckennetzes — Anordnung der gemessenen Strecken etwa nach Abb. 5 — sich zurückführen läßt

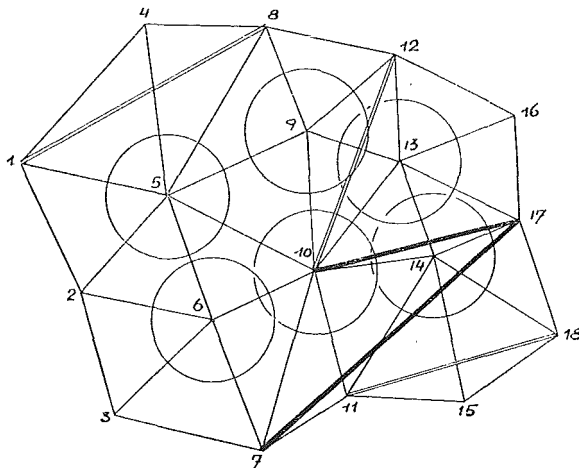


Abb. 5

ohne Diagonalen:  $\ddot{u} = 39 - 36 + 3 = 6$  (6 „innere“ Punkte)  
 mit dopp. gez. Diag.:  $\ddot{u} = 6 + 3 = 9$   
 mit stark gez. Diag.:  $\ddot{u} = 6 + 3 + 2 = 11$

auf die mehrmalige Anwendung der Ausgleichung des Zentralsystems, der allgemeinen Grundfigur in Streckennetzen. Denn: Jedes einfache Zentralsystem (jede allgemeine Grundfigur) enthält eine Überbestimmung; jede Überbestimmung im Streckennetz kann daher durch eine in dieses gelegte Grundfigur ausgedrückt werden. In ein Streckennetz können daher — vom später erwähnten Fall der „langen“ Seiten abgesehen — genau so viele nicht völlig zusammenfallende Grundfiguren gelegt werden, als Überbestimmungen in diesem vorkommen.

Sehen wir zunächst von den in Abb. 5 doppelt und stark gezeichneten Seiten ab, so enthält das dort skizzierte Streckennetz nach (2) sechs Überbestimmungen (sechs „innere“ Punkte); es besteht also damit Anlaß zu sechs Bedingungen zwischen den gemessenen Strecken. Diese Bedingungen formulieren wir durch Zerlegung der Figur in sechs Zentralsysteme, wodurch alle gemessenen Stücke in diesen allgemeinen Grundfiguren vorkommen. Es bilden also die Punkte 5, 6, 9, 10, 13, 14 die Zentren der Grundfiguren. Nach den obigen Ausführungen sind gerade so viele Grundfiguren möglich, als „innere“ Punkte vorkommen. Nehmen wir dazu die in der Figur angedeuteten, doppelt gezeichneten Seiten als gemessen an, so treten noch drei Bedingungen hinzu. Diese werden durch den Ansatz von drei weiteren Bedingungen in Grundfiguren (z. B. mit den Zentren 5, 9, 14 mit den Begrenzungen 1—8—9—10—6—2—1, 5—8—12—10—5, 13—17—18—11—10—13) in das erste System von Bedingungsgleichungen einbezogen.

Man sieht, daß das durch überbestimmte Streckennetze gegebene Ausgleichsproblem durch Auflösung des Netzes in Grundfiguren, deren Behandlung nach den Abschnitten 3 und 4 völlig zu schematisieren ist, in einfacher Weise behandelt werden kann. Nur dann, wenn einzelne Seiten zunächst nicht in Grundfiguren einbezogen werden können (lange Diagonalen, welche mit den vorhandenen Seiten nicht mehr Dreiecke ergeben), wird man bei der Anlage des Netzes durch entsprechende Ergänzungen wieder die Voraussetzungen zur Anwendung der Grundfigur schaffen müssen. Wird in Abb. 5 beispielsweise die stark gezeichnete Diagonale 7—17 in die Messung einbezogen, so wäre eine Ergänzung durch die Messung der gleichfalls stark gezeichneten Diagonalen 10—17 notwendig. Damit lassen sich zwei neue Grundfiguren mit den Zentren 10 und 14 bilden.

## 7. S c h l u ß b e m e r k u n g

Mit den vorangegangenen Ausführungen ist meines Erachtens der Weg zu einer schematischen Behandlung fast aller Probleme der Ausgleichung von Streckennetzen gezeigt. Ob diese heute oder morgen aktuell werden, wird davon abhängen, wie weit die Funkmessung oder die Bergstrand'sche Methode zur direkten Messung großer Entfernungen mit hochfrequent moduliertem Licht — oder ein anderes Verfahren — Eingang in die Technik der Triangulation finden werden.

### L i t e r a t u r n a c h w e i s:

- [1] R i n n e r, Geometrie mit Strecken, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik, Jahrgang 1950, Heft 7, 8.  
 [2] J o r d a n - E g g e r t, Handbuch der Vermessungskunde, Band I.