Paper-ID: VGI_192608

Beitrag zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate im Unterricht

Paul Werkmeister [1]

[1] *o. Professor an der Techn. Hochschule in Dresden*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **24** (3), S. 37–42

1926

BibTeX:


```
@ARTICLE{Werkmeister_VGI_192608,
Title = {Beitrag zur Begr{\"u}ndung der Methode der kleinsten Quadrate im
   Unterricht},
Author = {Werkmeister, Paul},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {37--42},
Number = {3},
Year = {1926},
Volume = {24}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Ing., Dr. techn. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. K. Lego.

Nr. 3. Wien, im Juni 1926. XXIV. Jahrgang.

Beitrag zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate im Unterricht.

Von Dr.-Ing. P. Werkmeister, o. Professor an der Techn. Hochschule in Dresden.

Geht man bei der Einführung in die Ausgleichsrechnung von dem Gedanken aus, den Anfänger möglichst rasch mit der Verwendungsmöglichkeit und dem praktischen Wert der Ausgleichungsrechnung vertraut zu machen, so muß man auf eine Begründung der Methode der kleinsten Quadrate zunächst ganz verzichten. Ist man so weit, daß man an eine Begründung denken kann, so kann man eine der beiden, von C. F. Gauss gegebenen Begründungen wählen. Verwendet man die ältere der beiden, so wird man sie im allgemeinen überhaupt an den Schluß stellen; benützt man die von C. F. Gauss später gegebene Begründungsart, so bringt man sie wohl am besten im Anschluß an die Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen*).

Im folgenden wird eine Begründung der Methode der kleinsten Quadrate mitgeteilt, die nur den Begriff des mittleren Fehlers und den des Gewichts, sowie die Kenntnis der Lehre vom Schwerpunkt als bekannt voraussetzt. Die Begründung ist keine strenge, sondern eine „plausible"; sie beruht darauf, daß der Ausdruck für den mittleren Fehler eines als Schnitt von zwei Geraden bestimmten Punktes — der „mittlere Punktfehler" — dem Anfänger glaubwürdig angeschrieben werden kann, und daß der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten als deren plausibelster Punkt angesprochen wird.

Die Begründung geht von der folgenden Aufgabe aus: Ein Punkt ist bestimmt durch den Schnitt von drei Geraden G_1, G_2 und G_3 mit den Gewichten g_1, g_2 und g_3; infolge der unvermeidlichen Messungsfehler gehen die drei Geraden nicht genau durch einen Punkt, sondern bilden ein fehler-

*) Vgl. Ch. A. Vogler. Didaktisches zur Ausgleichungsrechnung. Ztschr. f. Vermessungswesen 1904, Seite 394.

zeigendes Dreieck ABC (Abb. 1); es soll in diesem der plausibelste Punkt P bestimmt und seine Eigenschaften untersucht werden.

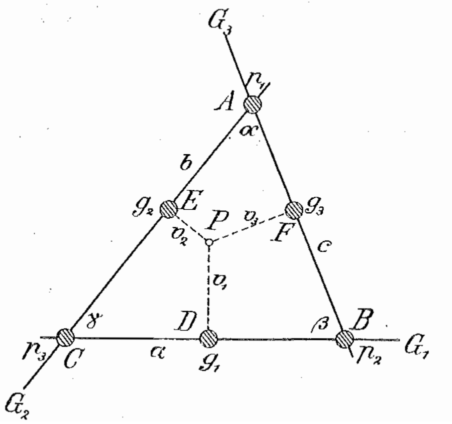

Abb. 1.

Den plausibelsten Punkt des Dreiecks ABC kann man nicht angeben auf Grund der Seiten, wohl aber auf Grund der Ecken des Dreiecks, wenn man sich in diesen drei Massenpunkte mit den Gewichten p_1, p_2 und p_3 angebracht denkt; als plausibelsten Punkt des Dreiecks wird man dann den Schwerpunkt P dieser drei Massenpunkte bezeichnen. Bevor man die Lage des Schwerpunkts P angeben kann, muß man die von der Gestalt des Dreiecks ABC und von den „Geradengewichten" g_1, g_2 und g_3 abhängigen „Punktgewichte" p_1, p_2 und p_3 bestimmen.

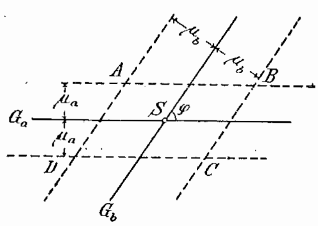

Abb. 2.

Ist ein Punkt S (Abb. 2) als Schnittpunkt von zwei, einen Winkel φ bildenden Geraden G_a und G_b bestimmt, und haben die Geraden die mittleren Fehler μ_a und μ_b, so ist der mittlere Fehler μ des Punktes S abhängig von μ_a, μ_b und φ, also eine Funktion dieser drei Größen. Der mittlere Punktfehler μ ist um so größer je größer μ_a und je größer μ_b, wird z. B. μ_a n mal größer, so kann man sagen, daß auch μ n mal größer wird; man kann deshalb setzen $\mu = \mu_a \mu_b f(\varphi)$. Da der Fehler μ um so kleiner je größer φ, so kann man $f(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi}$ setzen; man erhält damit für den mittleren Punktfehler

$$\mu = \frac{\mu_a \mu_b}{\sin \varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Aus der Gleichung (1) folgt, daß der mittlere Fehler μ des Punktes S proportional ist der Fläche des durch μ_a und μ_b bestimmten Parallelogramms $ABCD$ (Abb. 2).

Bezeichnet man die den mittleren Fehlern μ_a und μ_b entsprechenden Geradengewichte mit g_a und g_b, und das dem mittleren Punktfehler μ entsprechende Punktgewicht mit p, und geht man von den mittleren Fehlern auf die Gewichte über indem man setzt

$$\mu_a = \frac{1}{\sqrt{g_a}},\ \mu_b = \frac{1}{\sqrt{g_b}} \text{ und } \mu = \frac{1}{\sqrt{p}},$$

so erhält man aus der Gleichung (1)

$$p = g_a\, g_b \sin^2 \varphi \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Auf Grund dieser Gleichung findet man für die Gewichte p_1, p_2 und p_3 der Ecken des Dreiecks ABC (Abb. 1) die Werte

$$p_1 = g_2\, g_3 \sin^2 \alpha \quad p_2 = g_3\, g_1 \sin^2 \beta \quad p_3 = g_1\, g_2 \sin^2 \gamma \quad \dots \quad (3)$$

Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks ABC mit a, b und c, die zu a gehörige Höhe mit h_a und den Flächeninhalt des Dreiecks mit J, so ist

$$J = \frac{1}{2}\, a h_a \text{ und } J = \frac{1}{2}\, bc \sin \alpha,$$

$$\text{also } h_a = \frac{bc \sin \alpha}{a}.$$

Sind v_1, v_2 und v_3 die Abstände des Schwerpunkts P der drei Massenpunkte p_1, p_2 und p_3 in A, B und C von den Seiten des Dreiecks ABC (Abb. 1), so erhält man auf Grund des Momentensatzes in Bezug auf BC die Gleichung

$$v_1 = \frac{p_1 \dfrac{bc \sin \alpha}{a}}{p_1 + p_2 + p_3}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (3)

$$v_1 = \frac{bc}{a} \, \frac{g_2\, g_3 \sin^3 \alpha}{g_2\, g_3 \sin^2 \alpha + g_3\, g_1 \sin^2 \beta + g_1\, g_2 \sin^2 \gamma} \quad \dots \quad (4^a)$$

In ähnlicher Weise findet man für v_2 und v_3 die Gleichungen

$$v_2 = \frac{ca}{b} \, \frac{g_3\, g_1 \sin^3 \beta}{g_2\, g_3 \sin^2 \alpha + g_3\, g_1 \sin^2 \beta + g_1\, g_2 \sin^2 \gamma} \quad \dots \quad (4^b)$$

$$v_3 = \frac{ab}{c} \, \frac{g_1\, g_2 \sin^3 \gamma}{g_2\, g_3 \sin^2 \alpha + g_3\, g_1 \sin^2 \beta + g_1\, g_2 \sin^2 \gamma} \quad \dots \quad (4^c)$$

Aus den drei Gleichungen (4) ergibt sich

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{\sin^3 \alpha}{a^2\, g_1} : \frac{\sin^3 \beta}{b^2\, g_2} : \frac{\sin^3 \gamma}{c^2\, g_3};$$

beachtet man, daß

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

so wird

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{\sin \alpha}{g_1} : \frac{\sin \beta}{g_2} : \frac{\sin \gamma}{g_3}. \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Der Punkt P ist nicht nur der Schwerpunkt der in A, B und C wirkenden Massenpunkte p_1, p_2 und p_3, er ist auch der Schwerpunkt der in den Lotfußpunkten D, E und F angebrachten Massenpunkte g_1, g_2 und g_3; daß dies der Fall ist, läßt sich folgendermaßen zeigen:

Denkt man sich in dem Dreieck ABC mit den Abständen v_1', v_2' und v_3' von den Seiten einen Punkt P' (Abb. 3) derart, daß er der Schwerpunkt

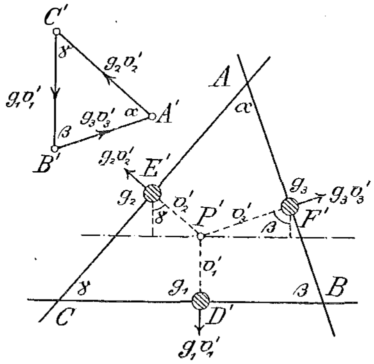

Abb. 3.

der in den Lotfußpunkten D', E' und F' wirkenden Massen g_1, g_2 und g_3 ist, so ergibt der Momentensatz in Bezug auf die drei Parallelen zu den Dreieckseiten durch P' die drei leicht abzulesenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} g_1 v_1' &= g_2 v_2' \cos\gamma + g_3 v_3' \cos\beta \\ g_2 v_2' &= g_3 v_3' \cos\alpha + g_1 v_1' \cos\gamma \\ g_3 v_3' &= g_1 v_1' \cos\beta + g_2 v_2' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen die Produkte $g_1\, v_1'$, $g_2\, v_2'$ und $g_3\, v_3'$ als Kräfte, und läßt man diese in P' angreifend in den Richtungen $P'D'$, $P'E'$ und $P'F'$ wirken, so ergibt sich aus den Gleichungen (6), daß diese drei Kräfte im Gleichgewicht sind, und daß das durch sie bestimmte Kräftedreieck $A'B'C'$ sich schließen muß. Infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ist

$$g_1 v_1' : g_2 v_2' : g_3 v_3' = a : b : c; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

hieraus folgt

$$g_1 v_1' = g_2 v_2' \frac{a}{b} \qquad g_2 v_2' = g_3 v_3' \frac{b}{c} \qquad g_3 v_3' = g_1 v_1' \frac{c}{a}.$$

Damit gehen die Gleichungen (6) über in

$$v_1' = \frac{g_3 v_3' \dfrac{b}{c} \cos\gamma + g_3 v_3' \cos\beta}{g_1}$$

$$v_2' = \frac{g_1 v_1' \dfrac{c}{a} \cos\alpha + g_1 v_1' \cos\gamma}{g_2}$$

$$v_3' = \frac{g_2 v_2' \dfrac{a}{b} \cos\beta + g_2 v_2' \cos\alpha}{g_3}$$

oder

$$v_1' = \frac{g_3 v_3'}{g_1} \frac{b \cos\gamma + c \cos\beta}{c} = \frac{g_3 v_3'}{g_1} \frac{a}{c}$$
$$v_2' = \frac{g_1 v_1'}{g_2} \frac{c \cos\alpha + a \cos\gamma}{a} = \frac{g_1 v_1'}{g_2} \frac{b}{a}$$
$$v_3' = \frac{g_2 v_2'}{g_3} \frac{a \cos\beta + b \cos\alpha}{b} = \frac{g_2 v_2'}{g_3} \frac{c}{b}$$

und man erhält z. B.

$$\frac{v_1'}{v_2'} = \frac{g_3 v_3'}{g_1 v_1'} \frac{g_2}{g_1} \frac{a\,a}{b\,c}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (7)

$$\frac{v_1'}{v_2'} = \frac{g_2 a}{g_1 b} = \frac{g_2 \sin\alpha}{g_1 \sin\beta}.$$

Es besteht somit die Gleichnung

$$v_1' : v_2' : v_3' = \frac{\sin\alpha}{g_1} : \frac{\sin\beta}{g_2} : \frac{\sin\gamma}{g_3}.$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit der Gleichung (5) zeigt, daß $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$ und $v_3' = v_3$; der Punkt P' stimmt also mit dem Punkt P überein.

Der Punkt P hat als Schwerpunkt der in D, E und F wirkenden Massenpunkte g_1, g_2 und g_3 die Eigenschaft, daß für ihn $g_1 v_1 v_1 + g_2 v_2 v_2 + g_3 v_3 v_3$ ein Minimum ist.

Wählt man, um dies zu zeigen, in der Entfernung e von P eine, Punkt $\mathfrak{P}$ mit den Seitenabständen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_3$, und bezeichnet man die Richtungswinkel der Lote v_1, v_2 und v_3 gegen eine beliebige feste Richtung mit α_1, α_2 und α_3 und den Richtungswinkel von $P\mathfrak{P}$ gegen dieselbe Anfangsrichtung mit φ, so ist

$$\mathfrak{v}_1 = v_1 - e \cos(\alpha_1 - \varphi)$$
$$\mathfrak{v}_2 = v_2 - e \cos(\alpha_2 - \varphi)$$
$$\mathfrak{v}_3 = v_3 - e \cos(\alpha_3 - \varphi).$$

Quadriert man diese Gleichungen, so gehen sie über in

$$\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_1 = v_1 v_1 + e^2 \cos^2(\alpha_1 - \varphi) - 2 v_1 e \cos(\alpha_1 - \varphi)$$
$$\mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_2 = v_2 v_2 + e^2 \cos^2(\alpha_2 - \varphi) - 2 v_2 e \cos(\alpha_2 - \varphi)$$
$$\mathfrak{v}_3 \mathfrak{v}_3 = v_3 v_3 + e^2 \cos^2(\alpha_3 - \varphi) - 2 v_3 e \cos(\alpha_3 - \varphi)$$

oder

$$\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_1 = v_1 v_1 + e^2 \cos^2(\alpha_1 - \varphi) - 2 v_1 e \cos\alpha_1 \cos\varphi - 2 v_1 e \sin\alpha_1 \sin\varphi$$
$$\mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_2 = v_2 v_2 + e^2 \cos^2(\alpha_2 - \varphi) - 2 v_2 e \cos\alpha_2 \cos\varphi - 2 v_2 e \sin\alpha_2 \sin\varphi$$
$$\mathfrak{v}_3 \mathfrak{v}_3 = v_3 v_3 + e^2 \cos^2(\alpha_3 - \varphi) - 2 v_3 e \cos\alpha_3 \cos\varphi - 2 v_3 e \sin\alpha_3 \sin\varphi.$$

Multipliziert man die Gleichungen jetzt mit den Gewichten g_1, g_2 und g_3, so erhält man für ihre Summe

$$[g \mathfrak{v}\mathfrak{v}] = [g v v] + e^2 [g \cos^2(\alpha - \varphi)] - 2 e \cos\varphi\, [g v \cos\alpha] - 2 e \sin\varphi\, [g v \sin\alpha].$$

Da die drei im Punkt P angreifenden Kräfte $g_1 v_1$, $g_2 v_2$ und $g_3 v_3$ im Gleichgewicht sind, so ist $[g\, v \cos\alpha] = o$ und $[g\, v \sin\alpha] = o$; damit geht die zuletzt geschriebene Gleichung über in

$$[g\, \mathfrak{v}\mathfrak{v}] = [g\, v v] + e^2 [g \cos^2(\alpha - \varphi)]$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist das zweite Glied stets positiv, es ist somit $[g\,\mathfrak{v}\mathfrak{v}]$ stets größer als $[g\,vv]$, d. h. $[g\,vv]$ ist ein Minimum.

Der bekannte Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate ist demnach eine Eigenschaft des plausibelsten Punktes P des fehlerzeigenden Dreiecks ABC (Abb. 1).

Zur strengen Ausgleichung von Theodolitzügen.

Von Dr. E. Hellebrand, o. ö. Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien.

Bei Streckenzügen, welche mit Richtungs- und Koordinatenabschluß zwischen Triangulierungspunkte eingehängt werden, treten drei Bedingungsgleichungen auf, die man kurz als Polygongleichungen bezeichnet.

Wir begegnen Gleichungen derselben Art auch bei Triangulierungsausgleichungen, so etwa bei einer Dreieckskette, die zwischen vier durch Koordinaten bestimmte Punkte eingelegt werden soll, ebenso bei einem Dreieckskranz. Da aber bei diesen Ausgleichungen stets nur Winkel- (Richtungs-) Verbesserungen auftreten, wird das Anschreiben der Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichungen meist keine besonderen Schwierigkeiten auslösen.

Es ist selbstverständlich, daß im Falle ungleich genauer Beobachtungen zunächst die Gewichtsverhältnisse festgestellt werden müssen; dann erübrigt noch die einfache, aber sehr wichtige Arbeit, die Koeffizienten der Winkelverbesserungen in den verschiedenartigen Verbesserungsgleichungen tunlichst auf gleiche Höhe zu bringen, was bei Seitengleichungen durch Multiplikation mit etwa 10^6, bei Polygongleichungen mitunter schon dadurch zu erreichen ist, daß man die Längen in *dm* oder *cm* einführt. Berechnet man gleichzeitig mit den Korrelaten auch die $[pvv]$, so erkennt man aus dem Betrag des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}},$$

ob die Gewichte richtig geschätzt waren.

Genau dasselbe wird auch bei der Ausgleichung eines Streckenzuges zu beachten sein; die Tatsache aber, daß hier außer Winkelverbesserungen auch Längenverbesserungen vorkommen, gibt den Verbesserungsgleichungen ein anderes Gepräge.

Bevor wir an die Aufstellung der genannten Gleichungen gehen, soll der Einfluß von Winkel- und Längenfehlern bei einem Theodolitzug näher untersucht werden.

1. Winkel- und Längenfehler.

Betrachten wir (Abb. 1) einen beliebigen Zug von n Seiten, der zwischen die Triangulierungspunkte 0 und n eingehängt ist und gegen W und P seinen Richtungsanschluß bzw. -Abschluß findet.