Paper-ID: VGI_192515

# Ergänzungsgleichungen zu den Normalgleichungen

Wilhelm Tischendorf [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **23** (6), S. 105–108

1925

BibTEX:

```
@ARTICLE{Tischendorf_VGI_192515,
Title = {Erg{\"a}nzungsgleichungen zu den Normalgleichungen},
Author = {Tischendorf, Wilhelm},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {105--108},
Number = {6},
Year = {1925},
Volume = {23}
}
```

Will man daher die Sorgfalt und Schärfe, mit der gewöhnlich die Polygonwinkel gemessen werden, durch die nachherige Ausgleichung nicht gänzlich wieder aufs Spiel setzen, so muß man strenge ausgleichen.

Nur in solchen Fällen erscheinen die Näherungen zulässig, bei denen die Winkel nicht mit Schärfe gemessen wurden (Bussole, graphisch).

Ich glaube, hiemit gezeigt zu haben, daß die scharfe Ausgleichung empfehlenswert und durch Anwendung der Koeffiziententabelle und tabellarische Anordnung der Rechnung einfach und rasch durchführbar ist.

---

## Ergänzungsgleichungen zu den Normalgleichungen.

Von Dr. Wilh. Tischendorf-Wien.

Bei der Auflösung von Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen im Wege der Gauss'schen Elimination wird gewöhnlich die Berechnung der $[vv]$ gleichzeitig durchgeführt, indem ein unabhängiges System von Koeffizienten angehängt wird.

Es ist hiebei eine gewisse Zwangsläufigkeit nicht von der Hand zu weisen, weil an die symmetrisch aufgebauten Normalgleichungen ein System von scheinbar unabhängigen Gliedern angeschlossen wird, die keine Gleichung bilden, aber doch wie eine Gleichung behandelt werden; es bereitet daher auch dem Anfänger gewisse Schwierigkeiten, diesem Wege zu folgen.

Es kann nun leicht gezeigt werden, daß diese scheinbar unabhängigen Glieder sich zu einer Gleichung verbinden lassen und daß erst durch diese Ergänzungsgleichungen der symmetrische Aufbau der Normalgleichungen abgeschlossen erscheint.

Bei der mit diesen Ergänzungsgleichungen durchgeführten Elimination der Normalgleichungen ergeben sich die sonst eigens geführten Beweise für die sog. „Restglieder" von selbst.

### 1. Bei den vermittelnden Beobachtungen.

Im nachstehenden sind der Einfachheit halber nur 2 Unbekannte und gleiche Gewichte angenommen.

Das vollständige System der Normalgleichungen im obigen Sinne lautet dann:

$$[aa]x + [ab]y - [al] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$
$$[ab]x + [bb]y - [bl] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$
$$-[al]x - [bl]y + [ll] = [vv] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

Gleichung 3), die im harmonischen Gefüge zu den Normalgleichungen steht, wird aus den Fehlergleichungen wie folgt gewonnen:

$$v = -l + ax + by$$

quadriert:

$$v^2 = l^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - 2alx - 2bly \quad \ldots\ldots 4)$$

Summe aller quadrierten Fehlergleichungen:

$$[vv] = [ll] + [aa]x^2 + [bb]y^2 + 2[ab]xy - 2[al]x - 2[bl]y \quad \ldots 5)$$

Die mit $-x$ bzw. $-y$ multiplizierten Normalgleichungen lauten:

$$-[aa]\,x^2 - [ab]\,yx + [al]\,x = 0$$
$$-[ab]\,xy - [bb]\,y^2 + [bl]\,y = 0$$

addiert:

$$-[aa]x^2 - 2\,[ab]\,xy - [bb]\,y^2 + [al]x + [bl]\,y = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad 6)$$

Aus 5) und 6) folgt:

$$-[al]\,x - [bl]\,y + [ll] = [vv].$$

Bei der Auflösung nach $y$ ergeben sich bei der ersten Reduktion:

$$[bb.1]\,y - [bl.1] = 0$$
$$-[bl.1]\,y + [ll.1] = [vv].$$

Bei der zweiten Reduktion:

$$[ll.2] = [vv].$$

Ganz analog bei der Auflösung nach $x$:

$$[bb]\,y + [ab]\,x - [bl] = 0$$
$$[ab]\,y + [aa]\,x - [al] = 0$$
$$-[bl]\,y - [al]\,x + [ll] = [vv]$$

Erste Reduktion:

$$[aa.1]\,x - [al.1] = 0$$
$$-[al.1]\,x + [ll.1] = [vv]$$

Zweite Reduktion:

$$[ll.2] = [vv].$$

Auf das Funktionsgewicht der ausgeglichenen Größe angewendet:

$$F = f_1\,x + f_2\,y.$$

Das Funktionsgewicht lautet bekanntlich:

$$M^2 = \frac{1}{P} = q_1 f_1 + q_2 f_2$$

worin

$$q_1 = [\alpha\alpha]\,f_1 + [\alpha\beta]\,f_2$$
$$q_2 = [\alpha\beta]\,f_1 + [\beta\beta]\,f_2$$

ebenso sind folgende Normalgleichungen bekannt:

$$[aa]\,q_1 + [ab]\,q_2 - f_1 = 0$$
$$[ab]\,q_1 + [bb]\,q_2 - f_2 = 0$$

hiezu als Ergänzung:

$$-f_1 q_1 - f_2 q_2 + 0 = -\frac{1}{P}$$

welche Gleichung oben als bekannt vorausgesetzt wurde.

Die erste Reduktion liefert:

$$[bb.1]\,q_2 - [f_2.1] = 0$$
$$-[f_2.1]\,q_2 - \frac{f_1^2}{[aa]} = -M^2$$

Die zweite Reduktion:

$$\frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{f_1^2}{[aa]} = M^2 = \frac{1}{P}$$

Werden in den Normalgleichungen $q_1, q_2 \ldots$, dann die $-f$ und $M^2$ der Reihe nach durch $k_1, k_2 \ldots$ bzw. $w$ und $[vv]$ der Korrelatengleichungen bzw. aus $-[wk]=[vv]$ vertauscht, dann ergibt sich die volle Übereinstimmung mit der Kontrollformel für $[vv]$ bei bedingten Beobachtungen.

$$\frac{w_1^2}{[aa]}+\frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]}=[vv]$$

Auf das arithmetische Mittel als den einfachsten Fall vermittelnder Beobachtungen angewendet, erhält man:

$$[vv]=[ll.1]=[ll]-nx^2$$

Hier lautet die Normalgleichung samt Ergänzungsgleichung:

$$\begin{aligned} nx-[l]&=0 \\ -[l]x+[ll]&=[vv] \end{aligned}$$

Letzte Gleichung ergibt sich analog wie früher aus den Fehlergleichungen.

Ebenso ergibt sich für das allgemeine arithmetische Mittel:

$$[pvv]=[ll.1]=[pll]-[p]x^2.$$

2. Bei den bedingten Beobachtungen.

Ganz gleichartig läßt sich bei den bedingten Beobachtungen verfahren und die Kontrollformel für die $[vv]$ ableiten; der Einfachheit halber seien auch hier nur 2 Bedingungsgleichungen zu Grunde gelegt und die Beobachtungen gleichgewichtig angenommen:

$$\begin{aligned} [aa]k_1+[ab]k_2+w_1&=0 \\ [ab]k_1+[bb]k_2+w_2&=0 \\ w_1k_1+w_2k_2+0&=-[vv] \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist also die bekannte Kontrollformel $-[wk]=[vv]$; die erste Reduktion liefert:

$$\begin{aligned} [bb.1]k_2+[w_2.1]&=0 \\ [w_2.1]k_2-\frac{w_1^2}{[aa]}&=-[vv] \end{aligned}$$

Die zweite Reduktion:

$$-\frac{[w_1^2]}{[aa]}-\frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]}=-[vv]$$

wodurch sich aus der Elimination die Kontrollformel für $[vv]$ von selbst ergibt.

Die gleiche Überlegung läßt sich auch bei der Gewichtsbestimmung einer Funktion der ausgeglichenen Elemente anwenden, indem an die Übertragungsgleichungen die entsprechende Ergänzungsgleichung angeschrieben wird.

Die Übertragungsgleichungen lauten bekanntlich:

$$\begin{aligned} [aa]r_1+[ab]r_2+[af]&=0 \\ [ab]r_1+[bb]r_2+[bf]&=0 \\ [af]r_1+[bf]r_2+[ff]&=[FF] \end{aligned}$$

Daß letztere Gleichung besteht, geht auch aus der Analogie mit den vermittelnden Beobachtungen hervor, indem zwischen obigen Übertragungsgleichungen und den nachfolgenden bekannten Beziehungen, nämlich:

$$F_1 = f_1 + a_1 r_1 + b_1 r_2$$
$$F_2 = f_2 + a_2 r_1 + b_2 r_2$$

einerseits und zwischen den Normalgleichungen und Fehlergleichungen vermittelnden Beobachtungen andererseits volle Übereinstimmung besteht, wenn an Stelle von $F_1$, $F_2, \ldots$; $f_1$, $f_2, \ldots$; $r_1$, $r_2, \ldots$; der Reihe nach die Größen $v_1$, $v_2 \ldots$; $-l_1$, $-l_2, \ldots$ und $x$, $y, \ldots$, treten.

Dann gilt aber auch hier:

$$-[al]\,x - [bl]\,y + [ll] = [vv]$$

was früher bewiesen wurde, also mit angegebener Vertauschung der Symbole:

$$[af]\,r_1 + [bf]\,r_2 + [ff] = [FF]$$

Bei der Auflösung der Übertragungsgleichungen muß sich schließlich ergeben:

$$[FF] = \frac{1}{P} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.1]}{[bb.1]} = [ff.2]$$

Die wenigen Beispiele ließen sich, abgesehen von der Erweiterung durch die Anwendung auf mehrere Unbekannte, mit verschiedenen Gewichten vermehren.

Es ist damit wieder ein Beweis gegeben für die volle Übereinstimmung und den gesetzmäßigen Aufbau der Formen in der Gauss'schen Ausgleichsrechnung, was durch die klassische Symbolik klar ersichtlich ist.

---

## Die Errichtung einer staatl. Prüfungs- und Versuchsanstalt für mathematisch-geodätische Instrumente.

In der am 8. Oktober l. J. in der Abteilung für wissenschaftliche und technische Apparate des n.-ö. Gewerbevereines abgehaltenen Versammlung hielt Kommerzialrat Neuhöfer einen Vortrag über die Errichtung einer staatlichen Versuchs- und Prüfungsanstalt für mathematische und geodätische Instrumente und führte darüber folgendes aus: „Die bisher geschaffenen technischen Versuchsanstalten haben sich bestens bewährt und sind für die Produktion fast unentbehrlich geworden. Die vorgeschlagene Versuchsanstalt für geodätische Instrumente hätte für den Konsumenten den Vorteil, daß die Instrumente mit einem von autoritativer Seite ausgestellten Zertifikate der vollen Leistungsfähigkeit versehen sind, wodurch das Vertrauen wesentlich erhöht und zeitraubende Kontrolle erspart wird, für den Produzenten den Vorteil, daß eine neutrale Stelle geschaffen wird, wo ihm in allen Fällen auf Grund wissenschaftlicher Forschung Rat und Auskunft zuteil wird, während für die Wissenschaft durch den stetigen Kontakt mit der Praxis, wie er durch die Prüfungsanstalt geboten wird, die Möglichkeit gegeben wird einen erziehenden, fördernden Einfluß auf die Produktion auszuüben, sowie Anregungen zu geben und zu empfangen. Der Gründung stellen sich keine finanziellen Schwierigkeiten entgegen, wenn die projektierte Versuchsanstalt mit dem bestehenden Bundesvermessungsamt in organischen Zusammenhang gebracht wird, da dort bereits alle benötigten Hilfsmittel vor-