Paper-ID: VGI_192401

Über die günstigste Gewichtsverteilung bei Punkteinschaltungen

Hans Ecker [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **22** (1–2), S. 1–26

1924

BibTeX:


```
@ARTICLE{Ecker_VGI_192401,
Title = {{\"U}ber die g{\"u}nstigste Gewichtsverteilung bei
   Punkteinschaltungen},
Author = {Ecker, Hans},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {1--26},
Number = {1--2},
Year = {1924},
Volume = {22}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion: Hofrat Prof. Dr. Ing. h. c. E. Doležal und Oberstadtbaurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 1/2. **Wien, im Juni 1924.** **XXII. Jahrgang.**

Über die günstigste Gewichtsverteilung bei Punkteinschaltungen.

Von Privatdozent Dr. Hans Ecker, Graz.

Sowie der Ausführung eines Bauwerkes ein fachtechnisch durchgebildeter Entwurf zur Grundlage dient, so muß ebenso auch die Anlage eines Dreiecksnetzes für eine größere Vermessung vor Beginn der Feldarbeit sorgfältig hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit studiert worden sein. Hiezu tritt in der heutigen Zeit noch die Bedingung, mit einem durch die Kosten beschränkten Arbeitsaufwand die möglichste Schärfe in den Ergebnissen zu erreichen, welch' letztere Forderung für die Aufstellung des Beobachtungsplanes maßgebend sein wird.

Es liegt in der Natur der Sache, daß der gesamte Arbeitsaufwand für irgend eine geodätische Aufgabe an bestimmte Grenzen gebunden ist, welche mit dem Aufwande an Zeit und Geld zusammenhängen. Heute mehr denn je gilt es, selbst den genauesten Arbeiten der Feldmessung das wirtschaftliche Prinzip zugrunde zu legen, also die Messungen rationell auszuführen. Zahlreich sind die Abhandlungen, welche die Ökonomie der Beobachtungen zum Gegenstande haben; sie weisen auf das Interesse hin, welches man der Frage, wie mit dem geringsten Arbeitsaufwand ein möglichst großer Effekt erzielt werden kann, allgemein entgegenbringt. Hervorzuheben wären insbesonders die Untersuchungen von Helmert, Jordan, Eggert, Klingatsch, Hellebrand, Kerl und Werkmeister*).

---

*) Helmert: „Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 13. Bd., 1868. — Jordan: „Über die Genauigkeit geodätischer Operationen". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 16. Bd., 1871. — Eggert: „Über die günstigsten Punktlagen beim Einschneiden". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 40. Bd., 1903. — Klingatsch: „Die Bestimmung des günstigsten Punktes für das Rückwärtseinschneiden". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 48. Bd., 1902. „Die günstigste Punktlage der durch geometrische Örter bestimmten Punkte eines Dreieckes bei der Triangulierung". Sitzungsb. d. k. Ak. d. W. i. Wien math. naturw. Kl., Bd. CXIX, Abt. 2 *a*, Dezember 1910. — Hellebrand: „Über die günstigste Gewichtsverteilung bei trigonometrischen Punktbestimmungen". Bd. LXXVIII d. Denkschr. d. math. naturw. Kl. d. k. Ak. d. W. i. Wien, 1912. — Kerl:

Diese genannten Arbeiten befassen sich im wesentlichen mit der Genauigkeit der Punktlage oder geben Richtlinien bezüglich der Wahl eines Neupunktes vom Standpunkte eines gegebenen Genauigkeitskalküles; sie sind demnach in Hinblick auf die Forderung möglichst rationeller Vermessungen nach dem allgemeinen Grundsatze über die Ökonomie der Arbeiten von Bedeutung. Sie schulen den praktischen Blick für den stabilen Aufbau von Triangulierungsnetzen, geben Anhaltspunkte, um die besten Bestimmungsstrahlen zu finden und enthalten treffliche Winke, um die Gesamtanlage der Messungen entsprechend anzuordnen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Terrainverhältnisse eine gewisse Freiheit in der Wahl von Neupunkten gestatten. Nicht immer aber liegt ein derartiges Terrain vor, welches allen Anforderungen und Bedingungen für die günstigste Triangulation Rechnung trägt; überdies ist zu beachten, daß für die Wahl von Neupunkten auch diejenigen Arbeiten von ausschlaggebender Bedeutung sind, denen die Neupunkte als Grundlage zu dienen haben.

Die vorliegende Arbeit behandelt nun die günstigste Verteilung der Messungsarbeiten bei den trigonometrischen Punktbestimmungen aus überschüssigen Elementen von dem Standpunkte aus, daß sowohl die Lage des Neupunktes als auch diejenige der Punkte des Netzes, von welchen aus die Punkteinschaltung erfolgt, bereits im vorhinein gegeben sind. Sie bezweckt die Schaffung eines Beobachtungsplanes bei vorgegebenem Arbeitsaufwand mit Rücksicht auf eine möglichst rationelle Ausführung der Messungen. Der Ökonomie der Beobachtungen entsprechend erstreckt sich die Verteilung der Messungen nur auf eine bestimmte Anzahl von Richtungen, und zwar beim Vorwärtseinschneiden auf drei, hingegen beim Rückwärtseinschneiden und beim kombinierten Einschneiden auf vier Richtungen. Wir werden dabei sehen, wie sich durch vermehrte Beobachtung dieser Richtungen entsprechend den ermittelten Gewichtszahlen und durch Ausschalten jener Richtungen aus den Beobachtungen, welche den Gewichten Null zugehören, die Genauigkeit im Ergebnis wesentlich günstiger gestaltet. Bei der Ermittlung der Gewichtsverteilung bei vorgegebener konstanter Gewichtssumme wird ferner auch jenen Bedingungen Rechnung getragen, unter welchen die Fehlerellipse in den Fehlerkreis übergeht. Hiebei ist unter der vorteilhaftesten oder günstigsten Gewichtsverteilung diejenige zu verstehen, bei welcher der aus den entsprechenden Messungen hervorgehende mittlere Punktfehler unter Einhaltung der oben angegebenen Bedingungen möglichst klein wird. Ein strenges Minimum im mittleren Punktfehler kann, wie bereits Helmert*) angegeben, bei Berücksichtigung dieser genannten

---

„Voranschläge der Genauigkeit beim trigonometrischen Punkteinschalten". Zeitschr. f. Verm., 1908. „Über den mittleren Punktfehler beim einfachen Vorwärtseinschnitt." Zeitschr. f. Verm., 1920. — Werkmeister: „Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen". Zeitschr. f. Verm., 1920. „Untersuchung der Genauigkeit von trigonometrischen Punktbestimmungen durch Einschneiden vor Ausführung der Messungen". Zeitschr. f. Verm., 1920.

*) Helmert: „Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 13. Bd., 1868. — „Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate." 2. Aufl., 1907.

Bedingungen nicht erreicht werden. Weiters sei gleich eingangs erwähnt daß die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung jederzeit, sobald nur für den gesuchten Punkt Näherungsdaten vorliegen, ohneweiters durchgeführt werden kann. Im Schlußteil unserer Abhandlung zeigen wir an zwei Beispielen den Rechnungsvorgang zur Bestimmung der Gewichtsverteilung für die einschlägigen Punkteinschaltungsmethoden.

Im Nachstehenden sollen nun das Vorwärtseinschneiden, das Rückwärtseinschneiden und das kombinierte Einschneiden aus überschüssigen Elementen hinsichtlich der günstigsten Gewichtsverteilung behandelt werden.

Vorwärtseinschneiden.

Ein Neupunkt P sei durch Messung von äußeren Richtungen aus n gegebenen Festpunkten $P_1 \ldots . P_n$ bestimmt; es liegen somit $(n-2)$ überschüssige Messungen vor. Die Beobachtungsergebnisse sind ungleich genau und durch die Angabe ihrer Gewichte g gekennzeichnet.

Sind die Näherungskoordinaten x_0 und y_0 für den gesuchten Punkt P bekannt, so ergeben sich für die einzelnen gemessenen Richtungen die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1, \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n, \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

welchen Gleichungen infolge der ungleichen Genauigkeit die Richtungsgewichte $g_1, g_2, \ldots . g_n$ zukommen. Darin bedeuten a und b die Richtungskoeffizienten, l die aus Beobachtungen folgenden Größen, x und y die gesuchten Korrektionen der Näherungskoordinaten für den aus n Richtungen eingeschnittenen Neupunkt P und $v_1, v_2, \ldots . v_n$ die Verbesserungen dieser n beobachteten Richtungen. a und b sind bestimmt durch:

$$\left.\begin{array}{l} a = -\rho \dfrac{\sin \sigma'}{s}, \\ b = -\rho \dfrac{\cos \sigma'}{s}. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Aus den Fehlergleichungen geht das System der Normalgleichungen:

$$[gaa]\, x + [gab]\, y + [gal] = 0,$$
$$[gab]\, x + [gbb]\, y + [gbl] = 0$$

hervor, woraus die gesuchten Korrektionen x und y folgen mit:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{[gal\,1]}{[gaa\,1]}, \\ y = -\dfrac{[gbl\,1]}{[gbb\,1]}. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Die Nenner dieser Gleichungen sind die entsprechenden Gewichte der Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{l} g_x = [gaa\,1], \\ g_y = [gbb\,1]. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Die in den Gleichungen 3) und 4) auftretenden Symbole entwickelt, ergeben:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{[gab][gbl] - [gal][gbb]}{D}, \\ y &= \frac{[gab][gal] - [gbl][gaa]}{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} g_x &= \frac{D}{[gbb]}, \\ g_y &= \frac{D}{[gaa]}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4a)$$

worin

$$D = [gaa][gbb] - [gab]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

gesetzt wurde.

In weiterer Folge erhält man den mittleren Fehler m einer beobachteten Richtung vom Gewichte eins, also den mittleren Gewichtseinheitsfehler aus:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[gvv]}{n-2}},$$

die mittleren Koordinatenfehler aus:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \frac{m^2}{g_x} = \frac{[gbb]}{D} m^2, \\ m_y^2 &= \frac{m^2}{g_y} = \frac{[gaa]}{D} m^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

und schließlich den mittleren Punktfehler M aus:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[gaa] + [gbb]}{D} m^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Für die Bestimmung der Elemente der zugehörigen mittleren Fehlerellipse gelten bekanntlich die Gleichungen *):

$$\left.\begin{aligned} tg\, 2\varphi &= \frac{-2[gab]}{-([gaa] - [gbb])}, \\ m^2_{\max} &= \frac{[gaa] + [gbb] + W}{2D} m^2 = A^2 \text{ mit dem Richtungswinkel } \varphi, \\ m^2_{\min} &= \frac{[gaa[+ [gbb] - W}{2D} m^2 = B^2 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \varphi \pm 90^0, \end{aligned}\right\} 8)$$

worin unter A und B die Halbachsen der mittleren Fehlerellipse zu verstehen sind und W durch den Ausdruck:

$$W = \sqrt{([gaa] - [gbb])^2 + 4[gab]^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

gegeben ist.

Vom Standpunkte einer guten Punktbestimmung ergibt sich nun die Forderung, daß der mittlere Punktfehler nach allen Richtungen gleich groß sein soll, mit anderen Worten: die mittlere Fehlerellipse soll in einen Fehlerkreis übergehen. Damit dies eintritt, muß:

$$m_{\max} = m_{\min}$$

---

*) Eggert: „Handbuch der Vermessungskunde“. 7. erw. Aufl., 1. Bd., 1920.

sein, welcher Bedingung mit Rücksicht auf 8) für

$$W = \text{Null}$$

entsprochen wird. Der Ausdruck für W nach 9) verschwindet für:

$$\left.\begin{aligned}[gab] &= 0 \text{ und} \\ [gaa] &= [gbb].\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

In diesem Falle tritt an die Stelle der Fehlerellipse der Fehlerkreis mit dem Halbmesser R_0 und zwar:

$$R_0 = A = B = \pm \frac{m}{\sqrt{[gaa]}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[gbb]}}. \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

Der mittlere Punktfehler M berechnet sich dann aus:

$$M^2 = 2\,R_0^2 = 2\,\frac{m^2}{[gaa]} = 2\,\frac{m^2}{[gbb]}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Aus der ersten Bedingung — $[gab] = 0$ — ist auch der Fall der Unmöglichkeit für das Auftreten des Fehlerkreises zu entnehmen. Gehören sämtliche Richtungswinkel der Bestimmungsgeraden für den Neupunkt demselben Quadranten an, so haben die entsprechenden Richtungskoeffizienten a und b das gleiche Vorzeichen und der genannten Bedingung kann demnach nicht entsprochen werden. Soll daher die Fehlerellipse Kreisform erhalten, so müssen sich die äußersten Bestimmungsgeraden unter einem Winkel treffen, welcher größer als 90^0 ist.

Wie bekannt, ist eine Punktbestimmung umso günstiger, je kleiner sich der mittlere Punktfehler M ergibt; wir werden demnach jene Punktbestimmung als die beste bezeichnen, welche den kleinsten mittleren Punktfehler aufweist. Soll nun aber der mittlere Punktfehler zu einem Minimum werden, dann muß unter Berücksichtigung des Fehlerkreises der Nenner in 12

$$[gaa], \text{ bzw. } [gbb]$$

zu einem Maximum werden. Fügt man den Nebenbedingungen wegen des Fehlerkreises auch noch diejenige bezüglich der konstanten Gewichtssumme hinzu, nämlich

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_n = [g] = K = \text{konstant}, \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

so kann bei Einhaltung dieser Nebenbedingungen das Minimum des mittleren Punktfehlers nicht erreicht werden. Wir werden uns daher begnügen müssen, dem erstrebten Minimum möglichst nahe zu kommen, welcher Forderung bei Erfüllung der gestellten Nebenbedingungen durch den Fehlerkreis mit möglichst kleinem Radius Ausdruck verliehen wird.

Die Gewichtsverteilung soll nun derart stattfinden, daß die Funktion

$$F = [gaa], \text{ bzw. } F = [gbb]. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

bei gleichzeitiger Erfüllung der Nebenbedingungen bezüglich des Fehlerkreises und des gegebenen Arbeitsaufwandes einen möglichst großen Wert erhält.

Die in 10), 13) und 14) auftretenden Symbole entwickelt, ergeben die Funktion F mit:

$$F = g_1\,a_1^2 + g_2\,a_2^2 + \ldots\ldots + g_n\,a_n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

und die Nebenbedingungen mit:

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad g_1 a_1 b_1 + g_2 a_2 b_2 + \ldots\ldots + g_n a_n b_n = 0, \\
&2.\quad g_1(a_1^2 - b_1^2) + g_2(a_2^2 - b_2^2) + \ldots + g_n(a_n^2 - b_n^2) = 0, \\
&3.\quad g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_n = K.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad 16)$$

In diesen Gleichungen treten die Gewichte $g_1, g_2, \ldots . g_n$ als Unbekannte auf. Die Größen a und b sind die Richtungskoeffizienten nach 2); die konstante Summe K ist durch den vorgegebenen Arbeitsaufwand als bekannt anzusehen, welcher im allgemeinen durch die Summe der beabsichtigten Einstellungen zahlenmäßig ausgedrückt werden kann.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, unter Benützung der Gleichungen 16) in Hinblick auf einen möglichst großen Wert in 15) die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung vorzunehmen.

Die Berechnung der Gewichtsverteilung wird sich mit Rücksicht auf eine möglichst rationelle Ausführung der Beobachtungen nur auf drei der in Frage stehenden Gewichtszahlen erstrecken; es wird demnach nur die Mindestzahl der Richtungen, welche eine Ausgleichung erfordern, mit Gewichtszahlen bedacht, wogegen die übrigen $(n-3)$ Richtungsgewichte Null zu setzen sind. Weiters werden wir beachten müssen, daß nur positive Werte für die errechneten Gewichte als brauchbare Lösungen anzusehen sind.

Unter Benützung der drei Gleichungen 16) drücken wir drei Gewichte — es sind dies g_1, g_2, g_3 — durch die übrigen $(n-3)$ Gewichte aus. Man bekommt dadurch drei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
g_1 &= \alpha_4 g_4 + \alpha_5 g_5 + \ldots . + \alpha_n g_n + r_1, \\
g_2 &= \beta_4 g_4 + \beta_5 g_5 + \ldots . + \beta_n g_n + r_2, \\
g_3 &= \gamma_4 g_4 + \gamma_5 g_5 + \ldots . + \gamma_n g_n + r_3.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 17)$$

In Anbetracht einer zweckentsprechenden Durchführung der Rechnungsarbeiten sind hiebei als g_1, g_2, g_3 nicht die Gewichte beliebiger drei Richtungen zu wählen, sondern die Gewichte solcher drei Richtungen, welche sich den Beobachtungsverhältnissen und dem praktischen Gefühle entsprechend als voraussichtlich günstige Richtungen für die Bestimmung des Neupunktes ergeben dürften.

Die in 17) auftretenden Größen α, β, γ und r sind bekannt und werden wie folgt gebildet:

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_m = \frac{(a_1^2-b_1^2)[(a_2b_2-a_1b_1)+(a_1b_1-a_mb_m)]-(a_2^2-b_2^2)(a_1b_1-a_mb_m)-(a_m^2-b_m^2)(a_2b_2-a_1b_1)}{(a_3^2-b_3^2)(a_2b_2-a_1b_1)+(a_2^2-b_2^2)(a_1b_1-a_3b_3)-(a_1^2-b_1^2)[(a_2b_2-a_1b_1)+(a_1b_1-a_3b_3)]}, \\
&\beta_m = \frac{a_1 b_1 - a_3 b_3}{a_2 b_2 - a_1 b_1}\gamma_m + \frac{a_1 b_1 - a_m b_m}{a_2 b_2 - a_1 b_1}, \\
&\alpha_m = -(\beta_m + \gamma_m + 1) \text{ für } m = 4, 5, 6, \ldots . n; \text{ ferner ist} \\
&r_3 = \frac{a_1 b_1[(a_2^2-b_2^2)-(a_1^2-b_1^2)]-(a_1^2-b_1^2)(a_2b_2-a_1b_1)}{(a_3^2-b_3^2)(a_2b_2-a_1b_1)+(a_2^2-b_2^2)(a_1b_1-a_3b_3)-(a_1^2-b_1^2)[(a_2b_2-a_1b_1)+(a_1b_1-a_3b_3)]}K, \\
&r_2 = \frac{a_1 b_1 - a_3 b_3}{a_2 b_2 - a_1 b_1} r_3 - \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2 - a_1 b_1} K, \\
&r_1 = K - (r_2 + r_3).
\end{aligned}\right\} \; 18)$$

Unsere Funktion F erscheint nun mit Rücksicht auf 17) in der Form:

$$F = g_4(a_1^2\alpha_4 + a_2^2\beta_4 + a_3^2\gamma_4 + a_4^2) + g_5(a_1^2\alpha_5 + a_2^2\beta_5 + a_3^2\gamma_5 + a_5^2) + \ldots.$$
$$\ldots.. + g_n(a_1^2\alpha_n + a_2^2\beta_n + a_3^2\gamma_n + a_n^2) + (a_1^2 r_1 + a_2^2 r_2 + a_3^2 r_3)$$

oder kürzer gefaßt:

$$F = A_4 g_4 + A_5 g_5 + \ldots.. + A_n g_n + A_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

In den meisten Fällen der Anwendung wird sich nun auf Grund der in 19) auftretenden Koeffizienten A in Verbindung mit den Gleichungen 17) bereits die eine oder die andere Lösung für die Gewichtsverteilung finden. Sollte dies nicht zutreffen, so lassen sich doch immer aus 19) Schlüsse ziehen, welche Richtungsgewichte zwecks Erreichung eines möglichst großen Wertes in F für die gesuchte Gewichtsverteilung in Frage kommen können.

Zur Erläuterung des soeben Gesagten sollen nun einige besondere Fälle bezüglich der Koeffizienten A in 19) in Hinblick auf die Ermittlung der Gewichtsverteilung erörtert werden.

1. Die Koeffizienten A_4, A_5, ... A_n und das Absolutglied A_0 sind positiv.

Soll g_1, g_2, g_3 eine der gesuchten Gewichtsverteilungen sein, so haben wir zur Ermittlung der entsprechenden Gewichtszahlen die übrigen $(n-3)$ Richtungsgewichte Null zu setzen. Sind nun die Absolutglieder r_1, r_2, r_3 in 17) positiv, so ist g_1, g_2, g_3 bereits eine Gewichtsverteilung; r_1, r_2, r_3 ergeben die betreffenden Gewichtszahlen und der damit erreichte Wert in F ist durch das Absolutglied A_0 in 19) bestimmt. — Die Funktion F wird aber einen umso größeren Wert erreichen und damit die Gewichtsverteilung umso günstiger werden, wenn sich die Gewichtsverteilung auf solche Richtungen erstreckt, deren Gewichte den größten Koeffizienten A in 19) angehören. Man wird demzufolge weitere Gewichtsverteilungen ins Auge fassen, solche, die sich aus einem bzw. zwei der durch 17) gegebenen Gewichte und aus zwei bzw. einem, der in 19) enthaltenen Gewichte zusammensetzen. Die übrigen Gewichte werden wie früher Null gesetzt; die Berechnung der Gewichtszahlen kann mit Hilfe der Gleichungen 17) vorgenommen werden.

2. Die Koeffizienten A_4, A_5, ... A_n sind teils positiv, teils negativ; hingegen ist das Absolutglied A_0 positiv.

Im allgemeinen kann in diesem Falle der unter „1" angegebene Vorgang zur Ermittlung der Gewichtsverteilung eingehalten werden; dabei werden jedoch in erster Linie jene Gewichte in Rechnung zu stellen sein, welche den positiven Koeffizienten in 19) angehören. Doch gilt dies keineswegs als Regel, denn häufig werden sich Gewichtsverteilungen ergeben, die sich auch auf jene Gewichte erstrecken, deren Koeffizienten A in 19) negativ sind.

3. Die Koeffizienten A_4, A_5, ... A_n sind positiv, das Absolutglied A_0 aber negativ.

Liegt dieser Fall vor, so ist, da A_0 negativ ist, zu erkennen, daß g_1, g_2, g_3 keine der gesuchten Gewichtsverteilungen sein kann. Man wird demzufolge die Gewichtsverteilung auf jene Gewichte erstrecken, die nur in 19) vorkommen oder eine der bereits früher angegebenen Kombinationen mit den durch 17), ausgedrückten Gewichten g_1, g_2, g_3, als Gewichtsverteilung vorsehen.

Sind alle Kombinationen der in 19) enthaltenen Gewichte mit den durch 17) bestimmten Gewichten versucht und die entsprechenden Gewichtsverteilungen ermittelt worden, so werden sich im allgemeinen noch weitere Gewichtsverteilungen ergeben, welche sich auf die in 19) vorkommenden Gewichte erstrecken.

Für den diesbezüglichen Rechnungsvorgang ist folgender Weg einzuschlagen. Man setzt die Gleichungen 17) gleich Null und drückt durch lineare Verbindung dieser Gleichungen weitere drei Gewichte — g_4, g_5, g_6 — durch die restlichen $(n-6)$ Gewichte aus. Es ergibt sich dadurch ein neues System von drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} g_4 &= \alpha_7' g_7 + \alpha_8' g_8 + \ldots\ldots + \alpha_n' g_n + r_1', \\ g_5 &= \beta_7' g_7 + \beta_8' g_8 + \ldots\ldots + \beta_n' g_n + r_2', \\ g_6 &= \gamma_7' g_7 + \gamma_8' g_8 + \ldots\ldots + \gamma_n' g_n + r_3', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

womit 19) übergeht in:

$$F = A_7' g_7 + A_8' g_8 + \ldots\ldots + A_n' g_n + A_0' \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

Zwecks Ermittlung von Gewichtsverteilungen haben nun dieselben Überlegungen bezüglich der Koeffizienten A' in 21) und der Gleichungen 20) einzusetzen, wie sie früher betreffs der Koeffizienten A in 19) und der Gleichungen 17) stattgefunden haben.

In gleicher Weise ist die Bildung neuer Systeme von drei Gleichungen fortzusetzen. Als Abschluß ergeben sich dann gleichfalls drei Gleichungen, welche auf der rechten Seite nur mehr drei bzw. zwei oder eines der gesuchten Gewichte aufweisen. Mit Hilfe dieser Gleichungen und der zugehörigen Gleichung für F können in der angegebenen Art die Gewichtsverteilungen bezüglich der noch auftretenden Gewichte ermittelt werden.

Wie dem soeben Gesagten zu entnehmen ist, werden sich im allgemeinen mehrere Lösungen für die Gewichtsverteilung ergeben. Als die günstigste Gewichtsverteilung bezeichnen wir dann jenes Wertsystem der Gewichte g, welches dem größten Wert in F entspricht, womit eben dem Minimum des mittleren Punktfehlers M möglichst nahe gekommen wird.

In den meisten Fällen der Anwendung geben die Art der Lage der Bestimmungsstrahlen für den Neupunkt untereinander sowie die Beobachtungsverhältnisse genügend Anhaltspunkte, welche Richtungen sich in Hinblick auf bekannte Genauigkeitsüberlegungen als günstig erweisen. Die Gewichte dieser Richtungen werden bei der zu suchenden Gewichtsverteilung in erster Linie zu berücksichtigen sein.

Als Kontrolle für die richtige Ermittlung der Gewichtszahlen hat zu gelten, daß die errechneten Werte addiert, den konstanten Arbeitsaufwand K ergeben sollen, und daß weiters die Nebenbedingungen bezüglich der Kreisform:

$$[gab] = 0 \text{ und}$$
$$[gaa] = [gbb]$$

erfüllt sein müssen.

Rückwärtseinschneiden.

In dem Punkte P sind zur Bestimmung seiner Koordinaten Richtungsmessungen nach n gegebenen Festpunkten P_1, P_2, ... P_n mit ungleicher Genauigkeit ausgeführt worden; es sind somit $(n-3)$ überschüssige Beobachtungen vorhanden.

Sind für den gesuchten Punkt wieder Näherungskoordinaten x_0, y_0 gerechnet, so lauten die Fehlergleichungen für die einzelnen gemessenen Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + z + l_1, \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + z + l_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n &= a_n x + b_n y + z + l_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

in welchen außer den gesuchten Korrektionen x, y der Näherungskoordinaten auch noch eine dritte Unbekannte z, die Richtungkorrektion, auftritt. a und b sind wie früher die nach 2) zu berechnenden Richtungskoeffizienten; l trägt den Charakter einer beobachtenden Größe. Ferner ist die Ungleichheit der Beobachtungen durch die Angabe der einzelnen Richtungsgewichte g_1, g_2, ... g_n gekennzeichnet, wobei über die Gewichtseinheit verfügt werden kann.

Da die Koeffizienten von z gleich der Einheit sind, so ergeben sich die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [gaa]x + [gab]y + [ga]z + [gal] &= 0, \\ [gab]x + [gbb]y + [gb]z + [gbl] &= 0, \\ [ga]x + [gb]y + [g]z + [gl] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 23)$$

Wird z eliminiert, so erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} [gaa\,1]x + [gab\,1]y + [gal\,1] &= 0, \\ [gab\,1]x + [gbb\,1]y + [gbl\,1] &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

aus welchen die Korrektionen mit:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[gal\,2]}{[gaa\,2]}, \\ y &= -\frac{[gbl\,2]}{[gbb\,2]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

folgen. Die Nenner in 25) sind wie früher die Gewichte der Unbekannten x und y, also:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= [gaa\,2] = [gaa\,1] - \frac{[gab\,1]^2}{[gbb\,1]}, \\ g_y &= [gbb\,2] = [gbb\,1] - \frac{[gab\,1]^2}{[gaa\,1]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Im weiteren bekommt man als mittlere Koordinatenfehler:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \frac{m^2}{[gaa\,2]} = \frac{[gbb\,1]}{D}\, m^2, \\ m_y^2 &= \frac{m^2}{[gbb\,2]} = \frac{[gaa\,1]}{D}\, m^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

worin

$$D = [gaa\,1]\,[gbb\,1] - [gab\,1]^2$$

gesetzt ist und

$$m = \pm \sqrt{\frac{[gvv]}{n-3}}$$

den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet. Schließlich wird der mittlere Punktfehler M aus:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[gaa\,1] + [gbb\,1]}{D}\, m^2 \quad \ldots\ldots \quad 28)$$

erhalten.

Nun gelten *), auch wenn x und y nicht die einzigen Unbekannten der Ausgleichung, wohl aber die zwei letzten Unbekannten in der Elimination von Normalgleichungen für vermittelnde Beobachtungen vorstellen, für die Achsen der Fehlerellipse immer noch die Formeln wie sie bei nur zwei Unbekannten aus den Gleichungen 8) folgen.

Für die Bestimmung der Elemente der Fehlerellipse haben wir demnach die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} tg\,2\varphi &= \frac{-2\,[gab\,1]}{-([gaa\,1] - [gbb\,1])}, \\ m^2_{\max} = A^2 &= \frac{[gaa\,1] + [gbb\,1] + W}{2D}\, m^2 \text{ mit dem Richtungswinkel } \varphi, \\ m^2_{\min} = B^2 &= \frac{[gaa\,1] + [gbb\,1] - W}{2D}\, m^2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \varphi \pm 90^\circ, \end{aligned}\right\} \quad 29)$$

worin W durch den Ausdruck gegeben ist:

$$W = \sqrt{([gaa\,1] - [gbb\,1])^2 + 4\,[gab\,1]^2}. \quad \ldots\ldots \quad 30)$$

In Befolgung unserer früher gestellten Bedingung betreffs des Fehlerkreises soll nun

$$W = \text{Null}$$

werden, welcher Forderung in Hinblick auf 30) durch:

$$\left.\begin{aligned} [gab\,1] &= 0 \text{ und} \\ [gaa\,1] &= [gbb\,1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

entsprochen wird. Im weiteren ergeben sich aus 26) mit Rücksicht auf 31):

$$\begin{aligned} [gaa\,2] &= [gaa\,1] \text{ und} \\ [gbb\,2] &= [gbb\,1]; \end{aligned}$$

demzufolge die Gleichungen 27) und 29) mit:

$$D = 2\,[gaa\,1] = 2\,[gbb\,1]$$

übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 = m_y^2 &= \frac{m^2}{[gbb\,1]} = \frac{m^2}{[gaa\,1]}, \\ \text{bzw.} \qquad m^2_{\max} = m^2_{\min} &= \frac{m^2}{[gbb\,1]} = \frac{m^2}{[gaa\,1]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 32)$$

Wir erhalten damit den Radius R_0 des Fehlerkreises aus:

---

*) Jordan: „Handbuch der Vermessungskunde". 1. Bd., 3. verb. Aufl., 1888, S. 354.

$$R_0 = A = B = \pm \frac{m}{\sqrt{[gaa\,1]}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[gbb\,1]}} \quad \ldots\ldots \quad 33)$$

und dem mittleren Punktfehler M aus:

$$M^2 = 2\frac{m^2}{[gaa\,1]} = 2\frac{m^2}{[gbb\,1]}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Soll nun der mittlere Punktfehler M möglichst klein werden, so muß nach Gleichung 28) mit Rücksicht auf 27)

$$[gaa\,2] \text{ bzw. } [gbb\,2]$$

einem Größtwert nahe kommen. Demnach ist die Funktion F, welche einen möglichst großen Wert erreichen soll, gegeben mit:

$$F = [gaa\,2] \text{ bzw. } F = [gbb\,2].$$

Werden die partiellen Differentiationen von F nach den einzelnen Gewichten g vorgenommen und die dadurch erhaltenen Gleichungen gleich Null gesetzt, so erhält man in Hinblick auf 26):

$$\frac{\partial F}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa\,1]}{\partial g_r} - \frac{2[gbb\,1][gab\,1]\frac{\partial [gab\,1]}{\partial g_r} - [gab\,1]^2\frac{\partial [gbb\,1]}{\partial g_r}}{[gbb\,1]^2} = 0$$

da nun nach der ersten Gleichung 31)

$$[gab\,1] = 0$$

sein muß, ergibt sich:

$$\frac{\partial [gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa\,1]}{\partial g_r} = 0.$$

In gleicher Weise bekommt man:

$$\frac{\partial F}{\partial g_r} = \frac{\partial [gbb\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gbb\,1]}{\partial g_r} = 0,$$

worin wie in der vorhergehenden Ableitung $r = 1, 2 \ldots\, n$ zu nehmen ist. Da weiters nach der zweiten Gleichung 31)

$$[gaa\,1] = [gbb\,1]$$

ist, so ist es gleichgültig, welcher dieser beiden Summenausdrücke für die Funktion F gewählt wird. Man hat somit wegen:

$$[gaa\,1] = [gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]}$$

die Funktion F gegeben durch:

$$F = [gaa\,1] = [gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Ist wieder K die Summe aller Messungsgewichte, also

$$[g] = g_1 + g_2 + \ldots + g_n = K = \text{konstant}, \quad \ldots\ldots \quad 36)$$

so erhält man in der Zusammenfassung:

$$F = \frac{K[gaa] - [ga]^2}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37)$$

und die Nebenbedingungen bei Erreichung eines möglichst großen Wertes in F mit:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & K[gab] - [ga][gb] = 0, \\ 2. & K[gaa] - [ga]^2 = K[gbb] - [gb]^2, \\ 3. & g_1 + g_2 + \ldots . + g_n = K. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

Die Entwicklung der Summenausdrücke in den Gleichungen 1 und 2 von 38) gibt:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & K[gab] - [ggab] - [g_i g_K(a_i b_K + a_K b_i)] = 0, \\ 2. & K[g(a^2 - b^2)] + [gg(b^2 - a^2)] + 2[g_i g_K(b_i b_K - a_i a_K)] = 0. \end{array}\right\} . \quad 39)$$

In diesen Gleichungen sind die ersten zwei Summenglieder von $1, \ldots .. n$ und das letzte Summenglied für alle Kombinationen von $i = 1, 2 \ldots . (n-1)$ und $K = (i+1), \ldots . n$ zu nehmen.

Unsere Aufgabe ist es nun, für die Mindestzahl der inneren Richtungen, welche eine Ausgleichung erfordert, also für vier Richtungen, die entsprechenden Gewichtszahlen zu bestimmen. Dabei hat sich deren Berechnung mit Rücksicht auf einen möglichst großen Wert in F zu vollziehen bei Einhaltung der durch 38) gegebenen Nebenbedingungen.

Zwecks Lösung der Aufgabe, die für sich allein unbestimmt ist, da nur drei Gleichungen 38) zur Verfügung stehen und vier darin als Unbekannte auftretende Gewichte g daraus bestimmt werden sollen, verschaffen wir uns weitere Hilfsgleichungen in der Art, daß wir die partielle Differentiation der Funktion F 35) nach den einzelnen Gewichten g vornehmen und die betreffenden Differentialquotienten gleich Null setzen. Man erhält somit:

$$\frac{\partial [gaa\,1]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa]}{\partial g_r} - \frac{2[g][ga]\frac{\partial [ga]}{\partial g_r} - [ga]^2 \frac{\partial [g]}{\partial g_r}}{[g]^2} = a_r^2 - \frac{2[ga]}{[g]} a_r + \frac{[ga]^2}{[g]^2} = \left(a_r - \frac{[ga]}{[g]}\right)^2 = 0.$$

Da $[g] = K$ ist, ergibt sich:

$$Ka_r = [ga] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

mit $r = 1, 2, \ldots . n$. Wir haben demnach n Hilfsgleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} Ka_1 = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots . + g_n a_n, \\ Ka_2 = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots . + g_n a_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Ka_n = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots . + g_n a_n. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 41)$$

Diese Gleichungen würden zur Bestimmung der n Gewichte in Hinblick auf einen ausgezeichneten Wert in F genügen, ohne daß hiebei den Bedingungen 38) Rechnung getragen wird. Werden jedoch diese berücksichtigt, so gelangt man auf ein System unlösbarer Gleichungen; demnach ist für die weitere Rechnung versuchsweise vorzugehen.

Man setzt in den Gleichungen 38) und 41) die Gewicht von $(n-4)$ Richtungen gleich Null; somit verbleiben vier Gewichte als Unbekannte, zu deren Ermittlung außer den drei Gleichungen 38) auch noch eine der Gleichungen 41) heranzuziehen ist. Hiebei ist es zweckmäßig, die Gewichte solcher vier Richtungen zu nehmen, welche in Hinblick auf bekannte Genauigkeitsüberlegungen als voraussichtlich günstige Richtungen für die Bestimmung des Neupunktes gelten.

Mit Benützung der dritten Gleichung 38) und einer der Gleichungen 41), welche Gleichungen die Gewichte in linearer Form enthalten, drückt man nun je zwei der gesuchten Gewichte durch die anderen zwei aus. Wird dieser Vorgang mit allen n Gleichungen durchgeführt, so erhält man n Paare von Gleichungen, welche in den meisten Fällen bereits Aufschluß geben, ob für die vier gesuchten Gewichte positive Werte zu erhoffen sind oder nicht. Würde man schon hier auf Gleichungen stoßen, nach welchen einzelne Gewichte negativ werden, so kann jede weitere Rechnung mit dieser Kombination von vier Richtungen unterbleiben. Es sind dann andere $(n - 4)$ Gewichte Null zu setzen und ist der soeben gegebene Vorgang zu wiederholen.

Hat man ein Gleichungspaar ermittelt, welches positive Werte für die gesuchten Gewichte erwarten läßt, so substituiert man die dadurch ausgedrückten Gewichte in den ersten zwei Gleichungen 38); dadurch werden zwei quadratische Gleichungen erhalten, in denen nur mehr zwei der gesuchten Gewichte als Unbekannte vorkommen. Somit sind diese beiden Gewichte bestimmt, wodurch sich aber auch die beiden anderen Gewichte ergeben.

Von den verschiedenen Lösungen für die Gewichtsverteilung, deren es im allgemeinen auch hier mehrere geben wird, ist wie früher jene beizubehalten, welche dem größten Werte in 37) entspricht.

Als Kontrolle für den Rechnungsvorgang hat zu gelten, daß die ermittelten Gewichte die Nebenbedingungen 38) befriedigen müssen.

Kombiniertes Einschneiden.

Zur Bestimmung der rechtwinkeligen Koordinaten eines Neupunktes P aus n durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten $P_1, P_2 \ldots P_n$ liegen i innere und s äußere Richtungen vor; demnach sind $(i + s - 4)$ überschüssige Messungen vorhanden wobei

$$i + s \overline{\gtrless} 2n$$

ist. Der ungleichen Genauigkeit der einzelnen Richtungen wird durch die Angabe der entsprechenden Gewichte Rechnung getragen und bedeuten $g_1, g_2 \ldots . g_i$ die Gewichte der inneren und $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots . \mathfrak{g}_s$ jene der äußeren Richtungen.

Die Fehlergleichungen für die s äußeren Richtungen sind:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1, \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2, \\ &\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_s &= a_s x + b_s y + l_s, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 42)$$

jene für die i inneren Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= a_1 x + b_1 y + z + l_1', \\ v_2' &= a_2 x + b_2 y + z + l_2', \\ &\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_i' &= a_i x + b_i y + z + l_i'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 43)$$

Die in den beiden Systemen von Fehlergleichungen auftretenden Koeffizienten a und b sind einander gleich, hingegen sind die Absolutglieder l von den l' verschieden.

Aus 42) und 43) folgen die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa]x + [Gab]y + [ga]z + [Gal] &= 0, \\ [Gab]x + [Gbb]y + [gb]z + [Gbl] &= 0, \\ [ga]x \;+\; [gb]y \;+\; [g]z \;+\; [gl] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 44)$$

hiebei ist:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa] &= [\mathfrak{g}aa] + [gaa] = \mathfrak{g}_1 a_1^2 + \ldots + \mathfrak{g}_s a_s^2 + g_1 a_1^2 + \ldots + g_i a_i^2, \\ [Gbb] &= [\mathfrak{g}bb] + [gbb] = \mathfrak{g}_1 b_1^2 + \ldots + \mathfrak{g}_s b_s^2 + g_1 b_1^2 + \ldots + g_i b_i^2, \\ [Gal] &= [\mathfrak{g}al] + [gal'] = \mathfrak{g}_1 a_1 l_1 + \ldots + \mathfrak{g}_s a_s l_s + g_1 a_1 l_1' + \ldots + g_i a_i l_i', \\ [Gbl] &= [\mathfrak{g}bl] + [gbl'] = \mathfrak{g}_1 b_1 l_1 + \ldots + \mathfrak{g}_s b_s l_s + g_1 b_1 l_1' + \ldots + g_i b_i l_i', \\ [ga] &= g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_i a_i, \\ [gl] &= g_1 b_1 + g_2 b_2 + \ldots + g_i b_i, \\ [gl] &= g_1 l_1' + g_2 l_2' + \ldots + g_i l_i', \\ [g] &= g_1 + g_2 + \ldots + g_i. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 45)$$

Durch Elimination von z aus den Gleichungen 44) erhält man die reduzierten Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa\,1]x + [Gab\,1]y + [Gal\,1] &= 0, \\ [Gab\,1]x + [Gbb\,1]y + [Gbl\,1] &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

in welchen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa\,1] &= [Gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]}, \\ [Gbb\,1] &= [Gbb] - \frac{[gb]^2}{[g]}, \\ [Gab\,1] &= [Gab] - \frac{[ga]}{[g]}[gb], \\ [Gal\,1] &= [Gal] - \frac{[ga]}{[g]}[gl], \\ [Gbl\,1] &= [Gbl] - \frac{[gb]}{[g]}[gl]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

ist. Aus 46) folgen die gesuchten Korrektionen x und y mit:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[Gal\,2]}{[Gaa\,2]}, \\ y &= -\frac{[Gbl\,2]}{[Gbb\,2]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Die Nenner dieser Brüche sind wie früher die Gewichte der entsprechenden Unbekannten; somit

$$\left.\begin{aligned} g_x &= [Gaa\,2] = [Gaa\,1] - \frac{[Gab\,1]^2}{[Gbb\,1]}, \\ g_y &= [Gbb\,2] = [Gbb\,1] - \frac{[Gab\,1]^2}{[Gaa\,1]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

In weiterer Folge erhalten wir die mittleren Fehler m_x und m_y aus:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \pm\frac{m}{\sqrt{[Gaa\,2]}} \text{ oder } m_x^2 = m^2\frac{[Gbb\,1]}{D}, \\ m_y &= \pm\frac{m}{\sqrt{[Gbb\,2]}} \text{ oder } m_y^2 = m^2\frac{[Gaa\,1]}{D}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 50)$$

worin m der mittlere Fehler der Gewichtseinheit aus:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[Gvv]}{i + s - 3}}$$

zu berechnen ist. Schließlich folgt der mittlere Punktfehler M in bekannter Weise aus:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = m^2 \frac{[Gaa\,1] + [Gbb\,1]}{D}, \quad \ldots \ldots \quad 51)$$

in welchem Ausdrucke gleich wie in 50):

$$D = [Gaa\,1][Gbb\,1] - [Gab\,1]^2$$

einzusetzen ist.

In ähnlicher Weise wie früher bekommen wir die Bestimmungselemente der entsprechenden Fehlerellipse aus:

$$\left.\begin{aligned} tg\,2\varphi &= \frac{-2[Gab\,1]}{-([Gaa\,1] - [Gbb\,1])}, \\ m^2_{max} = A^2 &= \frac{[Gaa\,1] + [Gbb\,1] + W}{2D} m^2 \text{ mit dem Richtungswinkel } \varphi, \\ m^2_{min} = B^2 &= \frac{[Gaa\,1] + Gbb\,1] - W}{2D} m^2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \varphi \pm 90^0, \end{aligned}\right\} \ldots 52)$$

wobei

$$W^2 = ([Gaa\,1] - [Gbb\,1])^2 + 4[Gab\,1]^2 \quad \ldots \ldots \quad 53)$$

gesetzt wurde.

Soll die Fehlerellipse in den Fehlerkreis übergehen, so muß der Ausdruck für W Null werden, welcher Forderung nach 53) mit

$$\left.\begin{aligned} &1. \quad [Gab\,1] = 0 \text{ und} \\ &2. \quad [Gaa\,1] = [Gbb\,1] \end{aligned}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad 54)$$

genügt wird. Mit Rücksicht auf diese Bedingungen 54) wegen des Fehlerkreises, erhalten wir in Hinblick auf die Gleichungen 49), 50) und 52):

$$m_x^2 = m_y^2 = m^2_{max} = m^2_{min} = \frac{m^2}{[Gaa\,1]} = \frac{m^2}{[Gbb\,1]}$$

und den mittleren Punktfehler M mit:

$$M^2 = 2\frac{m^2}{[Gaa\,1]} = 2\frac{m^2}{[Gbb\,1]}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad 55)$$

der Radius R_0 des entsprechenden Fehlerkreises ist dann:

$$R_0 = A = B = \pm \frac{m}{\sqrt{[Gaa\,1]}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[Gbb\,1]}}. \quad \ldots \ldots \quad 56)$$

Soll wie in den vorigen Aufgaben der mittlere Punktfehler M dem Minimum möglichst nahekommen, so muß nach 51) mit Rücksicht auf 50)

$$[Gaa\,2] \text{ bzw. } [Gbb\,2]$$

einem möglichst großen Werte zustreben. Somit ist unsere Funktion F gegeben durch:

$$F = [Gaa\,2] \text{ bzw. } F = [Gbb\,2].$$

Wird die partielle Differentiation von F nach den einzelnen inneren Richtungsgewichten g vorgenommen und dabei die Entwicklung nach 49) berücksichtigt, so erhält man:

$$\frac{\partial [Gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gaa\,1]}{\partial g_r} - \frac{2\,[Gbb\,1]\,[Gab\,1]\,\frac{\partial [Gab\,1]}{\partial g_r} - [Gab\,1]^2\,\frac{\partial [Gbb\,1]}{\partial g_r}}{[Gbb\,1]^2} = 0$$

Wegen der ersten Gleichung 54):

$$[Gab\,1] = 0$$

folgt

$$\frac{\partial [Gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gaa\,1]}{\partial g_r} = 0.$$

In gleicher Weise ergibt sich:

$$\frac{\partial [Gbb\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gbb\,1]}{\partial g_r} = 0,$$

in welcher Gleichung gleich wie in der vorhergehenden $r = 1, 2, \ldots. i$ zu nehmen ist. Wegen der zweiten Gleichung 54):

$$[Gaa\,1] = [Gbb\,1]$$

ist es belanglos, welcher von den beiden Summenausdrücken für die Funktion F herangezogen wird. Berücksichtigt man die Entwicklungen nach 47) bzw. nach 45), so erscheint F in der Form:

$$F = [Gaa\,1] = [\mathfrak{g}aa] + [gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]} \quad \ldots\ldots \quad 57)$$

Nennt man den gegebenen Arbeitsaufwand K, setzt man also die Summe der Gewichte:

$$\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \ldots. + \mathfrak{g}_s + g_1 + g_2 + \ldots. + g_i = K = \text{konstant} \quad .\ . \quad 58)$$

und entwickelt 54) in Hinblick auf 47) und 45), wodurch:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ [g]([\mathfrak{g}ab] + [gab]) - [ggab] - [g_\alpha g_\beta (a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha)] = 0, \\ 2.\ [g]([\mathfrak{g}(a^2 - b^2)] + [g(a^2 - b^2)]) + [gg(b^2 - a^2)] + 2[g_\alpha g_\beta (b_\alpha b_\beta - a_\alpha a_\beta)] = 0 \end{array}\right\} \quad 59)$$

erhalten wird, so hat man durch 58) und 59) die bei Erreichung eines möglichst großen Wertes in F einzuhaltenden Nebenbedingungen gegeben.

In den Gleichungen 59) hat sich die Entwicklung des ersten Summenausdruckes von $1, 2 \ldots. s$ und jene der zwei folgenden von $1, 2 \ldots. i$ zu erstrecken; hingegen ist das letzte Summenglied für alle Kombinationen von $\alpha = 1, 2 \ldots. (i-1)$ und $\beta = (\alpha + 1), \ldots. i$ auszuwerten. Die hierin auftretenden Richtungsgewichte $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots. \mathfrak{g}_s$ für die äußeren und $g_1, g_2 \ldots. g_i$ für die inneren Richtungen, erscheinen wie früher als Unbekannte; a und b sind die Richtungskoeffizienten nach Gleichung 2).

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, die Berechnung der Richtungsgewichte für die Mindestzahl der Richtungen, welche beim kombinierten Einschneiden eine Ausgleichung erfordern, also für vier Richtungen, mit Hilfe der Gleichungen 58) und 59) in Hinblick auf einen möglichst großen Wert in F 57) vorzunehmen.

Diese Aufgabe, welche für sich allein unbestimmt erscheint, da ja nur drei Gleichungen 58), 59) für den Rechnungsvorgang zur Verfügung stehen und vier Unbekannte zu bestimmen sind, wird in ganz ähnlicher Weise behandelt wie dies beim Rückwärtseinschneiden der Fall war. Die Bestimmung der Gewichtsverteilung wird im allgemeinen mehr Lösungen als früher ergeben, da der Kombination bei s äußeren und i inneren Richtungen mehr Spielraum geboten ist. Es muß auch hier versuchsweise vorgegangen werden; hiebei sind der Reihe nach äußere Richtungsgewichte mit inneren in der Gesamtzahl vier miteinander zu kombinieren. Ähnlich wie beim Rückwärtseinschneiden werden wir Hilfsgleichungen aufstellen, die uns in Verbindung mit der Gleichung 58) in die Lage setzen, je zwei der in Rechnung stehenden Gewichte durch die anderen zwei auszudrücken.

Diese besagten Hilfsgleichungen ergeben sich aus 57), indem man den partiellen Differentialquotienten dieser Gleichung nach den einzelnen inneren Gewichten g bildet und die dadurch erhaltenen Gleichungen gleich Null setzt. Man bekommt damit:

$$\frac{\partial F}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gaa\,1]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa]}{\partial g_r} - \frac{2\,[g]\,[ga]\,\frac{\partial [ga]^2}{\partial g_r} - [ga]^2 \frac{\partial [g]}{\partial g_r}}{[g]^2} =$$

$$= a_r^2 - 2\,a_r \frac{[ga]}{[g]} + \frac{[ga]^2}{[g]^2} = \left(a_r - \frac{[ga]}{[g]}\right)^2 = 0,$$

bzw.

$$a_r - \frac{[ga]}{[g]} = 0$$

oder

$$[g]\,a_r = [ga], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

wobei $r = 1, 2, \ldots\ldots i$ zu nehmen ist.

Somit stehen i Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [g]\,a_1 = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_i a_i, \\ [g]\,a_2 = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_i a_i, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [g]\,a_i = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_i a_i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 61)$$

als Hilfsgleichungen zur Verfügung.

Nun setzt man die Gewichte von $(i + s - 4)$ Richtungen Null und stellt äußere und innere Richtungsgewichte miteinander kombiniert in die Rechnung; dabei werden mit Rücksicht auf einen möglichst großen Wert in F laut Gleichung 57) in erster Linie jene äußeren Richtungen zu wählen sein, deren Gewichte $\mathfrak{g}$ den größten Koeffizienten a^2 angehören. Im weiteren kann unter Verwendung der Hilfsgleichungen 61) und der Gleichung 58) sowie der damit folgenden Gleichungspaare und der beiden Gleichungen 59) derselbe Vorgang zur Ermittlung der Gewichtsverteilung eingehalten werden wie dies beim Rückwärtseinschneiden bezüglich der Gleichungen 41) und 38) der Fall war. Es werden auch hier mehrere Lösungen für die Gewichtsverteilung im allgemeinen in Betracht kommen und ist jene als die günstigste zu bezeichnen und beizubehalten, welche den größten Wert in F 57) ergibt. Als Kontrolle hat wie früher zu gelten, daß sämtlichen drei Nebenbedingungen nach den Gleichungen 58), 59) durch Einsetzen der errechneten Gewichtszahlen entsprochen wird.

In manchen Fällen der Anwendung wird es wünschenswert erscheinen, das kombinierte Einschneiden durch ein Vorwärtseinschneiden mit drei Richtungen oder durch ein Rückwärtseinschneiden mit vier Richtungen zu ersetzen.

In diesen Fällen kann zur Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung wie folgt vorgegangen werden.

Im ersten Falle gehen die Gleichungen 57), 58) und 59), da hierin die Gewichte g der inneren Richtungen Null zu setzen sind, über in:

$$F = [gaa] = g_1 a_1^2 + g_2 a_2^2 + \ldots + g_s a_s^2 \quad \ldots\ldots\ldots 62)$$

und

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & g_1 a_1 b_1 + g_2 a_2 b_2 + \ldots + g_s a_s b_s = 0, \\ 2. & g_1 (a_1^2 - b_1^2) + g_2 (a_2^2 - b_2^2) + \ldots + g_s (a_s^2 - b_s^2) = 0 \\ 3. & g_1 + g_2 + \ldots + g_s = K = \text{konstant.} \end{array}\right\} \quad . \; 63)$$

Wir bekommen damit dieselben Gleichungen wie sie beim Vorwärtseinschneiden der Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung dienten. Es ist demnach in der bereits beim Vorwärtseinschneiden gegebenen Art vorzugehen, um die vorteilhafteste Gewichtsverteilung zu erhalten.

Ersetzt man aber das kombinierte Einschneiden durch ein Rückwärtseinschneiden aus vier Richtungen, so wird, da jetzt in 57), 58) und 59) die Gewichte g der äußeren Richtungen Null zu nehmen sind:

$$F = \frac{[g]\,[gaa] - [ga]^2}{[g]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 64)$$

und

$$\begin{array}{ll} 1. & [g]\,[gab] - [ggab] - [g_\alpha g_\beta (a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha)] = 0, \\ 2. & [g]\,[g(a^2 - b^2)] + [gg(b^2 - a^2)] + 2\,[g_\alpha g_\beta (b_\alpha b_\beta - a_\alpha a_\beta)] = 0, \\ 3. & g_1 + g_2 + \ldots + g_i = K = \text{konstant.} \end{array}$$

In diesen Gleichungen sind die ersten zwei Summenglieder von $1 \ldots i$ und das letzte Summenglied für alle Kombinationen von $\alpha = 1, \ldots (i - 1)$ und $\beta = (\alpha + 1), \ldots i$ auszuwerten.

Die Berechnung der Gewichtszahlen für die vier Richtungen, also der Gewichtsverteilung, kann nun in der beim Rückwärtseinschneiden geschilderten Weise vorgenommen werden; wie immer ist jene Gewichtsverteilung als die günstigste beizubehalten, welche den kleinsten mittleren Punktfehler ergibt.

Vom Standpunkte der Anwendung ist der soeben besprochene zweite Weg zweifellos vorteilhafter als der erste. Denn, für die Ausführung der Beobachtungen kommt hiebei nur ein Instrumentenstandpunkt in Betracht, und weiters ist ja an und für sich das Rückwärtseinschneiden dem Vorwärtseinschneiden bezüglich der Genauigkeit überlegen.

Aus dem soeben Gesagten ist zu entnehmen, daß die für das kombinierte Einschneiden sich ergebende günstigste Gewichtsverteilung nicht unter allen Umständen auch tatsächlich die rationellste für die Bestimmung des Neupunktes ist. Wir haben demnach die Ergebnisse der drei erörterten Fälle miteinander zu vergleichen und dabei zu überlegen, inwieweit vermehrter Arbeitsaufwand am Platze ist, um der sich ergebenden günstigsten Gewichtsverteilung gerecht zu werden.

Bisher hatten wir als Maß des Arbeitsaufwandes die Anzahl der erforderlichen Einstellungen bzw. Beobachtungen aufgestellt. Für die Zwecke der Feldarbeit werden jedoch für die Aufstellung eines rationellen Beobachtungsplanes auch andere Gesichtspunkte zu berücksichtigen sein. Hiebei kommen besonders die Anzahl der Instrumentenaufstellungen, die damit folgende Vergrößerung des Weges und des Zeitaufwandes in Betracht. Es wird sich demnach in Hinblick auf die mit der Ausführung der Beobachtungen in Verbindung stehenden Arbeiten manchmal ein Abgehen von der günstigsten Gewichtsverteilung vorteilhaft erweisen. Man wird gegebenenfalls unter einen kleinen Einbuße an Genauigkeit jene Art der Punkteinschaltung unter den ermittelten Gewichtsverhältnissen wählen, welche in Vergleich zu den anderen ein Mindestmaß an Weg und Zeit, demnach möglichst wenig Instrumentenaufstellungen erfordert.

Beispiele.

Im Anschlusse an die allgemeinen Formeln, welche für die behandelten Arten der Punkteinschaltungsmethoden der Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung zu dienen haben, soll nun für das Vorwärtseinschneiden und für das Rückwärtseinschneiden die Auswertung der aufgestellten Formeln gezeigt werden, wobei auch der Rechnungsvorgang, soweit er sich zur Klarstellung als notwendig erweist, mitgeteilt wird. Um weiters den durch die günstigste Gewichtsverteilung erzielten höheren Grad der Genauigkeit in der Bestimmung des Neupunktes vor Augen zu führen, geben wir vorerst die Ergebnisse der Ausgleichung mit Rücksicht auf die vorgegebenen Gewichtszahlen. Hieran wird sich die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung reihen; zum Schlusse finden sich die Resultate der Ausgleichung, welche sich in Hinblick auf die günstigste Gewichtsverteilung ergeben. Ferner sei erwähnt, daß die Ermittlung der Gewichtszahlen lediglich mit Rücksicht auf die gegebenen Rechnungskontrollen entsprechend scharf — auf vier Dezimalen — vorgenommen wurde; für die Zwecke der Anwendung wird man jedenfalls mit einer bzw. zwei Dezimalen das Auslangen finden.

1. Vorwärtseinschneiden aus sieben Punkten.

Anläßlich der Triangulierung St. Peter b. Graz 1921 wurde die Bestimmung des unzugänglichen Punktes K durch Vorwärtseinschneiden aus sieben Punkten durchgeführt.

Die diesbezüglichen erforderlichen Angaben sind der folgenden Tabelle zu entnehmen, welche außer den Koordinaten x und y der gegebenen Punkte auch die Messungsergebnisse in Form von orientierten Richtungen enthält. Die Beobachtungen sind gleich genau; wir erteilen jeder das Gewicht $g = 1$, demzufolge sich die Summe der Beobachtungsgewichte $[g] = 7$ ergibt.

	Gegebene Punkte:						
	1 *(D)*	2 *(E)*	3 *(G)*	4 *(F)*	5 *(A)*	6 *(B)*	7 *(C)*
	Koordinaten						
x	2372·041	782·138	1598·874	1734·159	2000·000	2130·444	1980·630
y	1412·016	1123·363	2050·432	632·848	1500·000	1701·336	1752·099
	Orientierte Richtungen nach K						
	171° 02′ 50·9″	30° 09′ 21·7″	264° 32′ 47·4″	103° 38′ 41·7″	174° 26′ 22·6″	193° 58′ 24·0″	203° 35′ 29·0″

Als Näherungskoordinaten für K erhält man aus C und D gerechnet:

$$x_0 = 1512 \cdot 100\, m,$$
$$y_0 = 1547 \cdot 487\, m.$$

Somit folgen die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
v_1 &= - 36 \cdot 9x - 324 \cdot 1y - 0 \cdot 2,\\
v_2 &= - 122 \cdot 7x + 211 \cdot 3y + 6 \cdot 4,\\
v_3 &= + 380 \cdot 6x - 36 \cdot 3y - 3 \cdot 4,\\
v_4 &= - 213 \cdot 0x - 51 \cdot 7y + 6 \cdot 4,\\
v_5 &= - 40 \cdot 8x - 418 \cdot 8y + 4 \cdot 8,\\
v_6 &= + 78 \cdot 2x - 314 \cdot 1y - 5 \cdot 0,\\
v_7 &= + 161 \cdot 5x - 369 \cdot 7y + 0 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Aus den Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
234.504x - 87.276y - 4.006 &= 0,\\
-87.276x + 514.170y + 621 &= 0
\end{aligned}$$

ergeben sich die Korrektionen x und y mit:

$$x = + 0 \cdot 017_8\, m,$$
$$y = + 0 \cdot 001_8\, m$$

und damit die ausgeglichenen Koordinaten für den Punkt K:

$$x_K = 1.512 \cdot 118\, m,$$
$$y_K = 1.547.489\, m.$$

Die weitere Rechnung liefert der Reihe nach:

$$m = \pm 3 \cdot 51''; \; m_x = \pm 0 \cdot 007_5\, m; \; m_y = \pm 0 \cdot 005_1\, m \text{ und } M = \pm 0 \cdot 009_1\, m.$$

Die zugehörige Fehlerellipse ist bestimmt durch:

$$\varphi = 15^0\, 59'\, 05''; \; A = m_{\max} = \pm 0 \cdot 007_7\, m; \; B = m_{\min} = \pm 0 \cdot 004_8\, m.$$

Soweit die Ergebnisse, wie sie ohne Rücksicht auf die Gewichtsverhältnisse gewonnen werden.

Zur Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung hat man nun nachstehenden Rechnungsweg einzuschlagen.

Da die Summe der Beobachtungsgewichte sieben beträgt, so ist in dem Folgenden als vorgegebener Arbeitsaufwand $K = 7$ einzusetzen. Die Funktionsgleichung 15) lautet in dem vorliegenden Falle:

$$F = 1.362 g_1 + 15.055 g_2 + 144.856 g_3 + 45.369 g_4 + 1.665 g_5 + 6.115 g_6 + 20.082 g_7$$

und die Nebenbedingungen nach 16) ergeben sich mit:

1. $8.638\, g_1 - 25.927\, g_2 - 13.816\, g_3 + 11.012\, g_4 + 17.087\, g_5 - 24.563\, g_6 -$
   $- 59.707\, g_7 = 0,$
2. $- 53.441\, g_1 - 29.591\, g_2 + 143.538\, g_3 + 42.696\, g_4 - 173.728\, g_5 - 92.544\, g_6 -$
   $- 116.596\, g_7 = 0,$
3. $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 = K = 7$

Als günstige Richtungen für die Bestimmung des Punktes K können auf Grund einer Skizze jene von den Punkten 1 (D), 2 (E) und 3 (G) angenommen werden. Die Gewichte g_1, g_2, g_3 dieser Richtungen durch die übrigen Gewichte $g_4, \ldots . g_7$ ausgedrückt, ergibt nach 17):

$$g_1 = -0{\cdot}8799\,g_4 - 1{\cdot}4654\,g_5 - 0{\cdot}1592\,g_6 + 0{\cdot}6596\,g_7 + 4{\cdot}6089,$$
$$g_2 = +0{\cdot}4187\,g_4 - 0{\cdot}1653\,g_5 - 1{\cdot}1825\,g_6 - 2{\cdot}5663\,g_7 + 0{\cdot}5597,$$
$$g_3 = -0{\cdot}5388\,g_4 + 0{\cdot}6307\,g_5 + 0{\cdot}3417\,g_6 + 0{\cdot}9067\,g_7 + 1{\cdot}8314.$$

Als zugehörige Gleichung F nach 19) folgt:

$$F = -27.567\,g_4 + 88.536\,g_5 + 37.591\,g_6 + 113.684\,g_7 + 279.986.$$

Da das Absolutglied in F und jene in den Gleichungen für g_1, g_2, g_3 positiv sind, so ist für $g_4 = g_5 = g_6 = g_7 = 0$ mit

$$g_1 = 4{\cdot}6089,$$
$$g_2 = 0{\cdot}5597,$$
$$g_3 = 1{\cdot}8314$$

eine Gewichtsverteilung gefunden. Der damit erreichte Wert in F ergibt sich mit:

$$F = 279.986.$$

Auf Grund der vorliegenden Gleichungen können mit Rücksicht auf die Koeffizienten in F noch weitere Gewichtsverteilungen ermittelt werden, welche in der nachstehenden Tabelle unter Nr. 1 . . . . 6 eingereiht sind.

Sind alle möglichen Gewichtsverteilungen, die sich zwischen g_1, g_2, g_3 und einem oder zwei der in F auftretenden Gewichte erstrecken, gefunden, so führt zur Ermittlung der Gewichtsverteilung zwischen $g_4 \ldots . g_7$ folgender Rechnungsweg zum Ziele.

Man setzt die Gleichungen für g_1, g_2, g_3 gleich Null und drückt g_4, g_5, g_6 durch g_7 aus; dadurch ergeben sich:

$$g_4 = +0{\cdot}7175\,g_7 + 4{\cdot}8046,$$
$$g_5 = +0{\cdot}2309\,g_7 + 0{\cdot}0243,$$
$$g_6 = -1{\cdot}9484\,g_7 + 2{\cdot}1711;$$

damit wird

$$F = +41.106\,g_7 + 231.303.$$

Aus diesen Gleichungen können in Befolgung derselben Überlegungen wie früher die in der Tabelle unter Nr. 7 und 8 angegebenen Gewichtsverteilungen bestimmt werden.

Aus der nun folgenden Tabelle ist zu entnehmen, daß die unter Nr. 6 gegebene Gewichtsverteilung vermöge des größten Wertes in F als die günstigste anzusehen ist. Sie führt, da g_2 gegenüber g_3 und g_5 klein ist, dem Wesen nach auf ein einfaches Vorwärtseinschneiden aus den Punkten 3 und 5, bei welchen die Richtungen entsprechend scharf zu beobachten sind.

Der Rechnungsvorgang der Ausgleichung unter Berücksichtigung der ermittelten Gewichtsverhältnisse geht wegen der Nebenbedingungen:

$$[gab] = 0 \text{ und}$$
$$[gaa] = [gbb]$$

wesentlich einfach vor sich.

Für die folgende Ausgleichungsrechnung wurde die günstigste d. i. die in der Tabelle unter Nr. 6 angeführte Gewichtsverteilung gewählt.

Nr.	Gewichtsverteilung	F	Nr.	Gewichtsverteilung	F
1	$\left.\begin{matrix} g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 4{\cdot}6089 \\ g_2 = 0{\cdot}5597 \\ g_3 = 1{\cdot}8314 \end{matrix}$	279.986	5	$\left.\begin{matrix} g_2 \\ g_3 \\ g_5 \\ g_6 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 0{\cdot}7434 \\ g_4 = 5{\cdot}1915 \\ g_7 = 1{\cdot}0651 \end{matrix}$	257.956
2	$\left.\begin{matrix} g_3 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 1{\cdot}6178 \\ g_2 = 1{\cdot}9829 \\ g_4 = 3{\cdot}3993 \end{matrix}$	186.278	6	$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_4 \\ g_6 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_2 = 0{\cdot}0398 \\ g_3 = 3{\cdot}8150 \\ g_5 = 3{\cdot}1452 \end{matrix}$	558.445
3	$\left.\begin{matrix} g_2 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 4{\cdot}5336 \\ g_3 = 1{\cdot}9931 \\ g_6 = 0{\cdot}4733 \end{matrix}$	297.779	7	$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_4 = 4{\cdot}8046 \\ g_5 = 0{\cdot}0243 \\ g_6 = 2{\cdot}1711 \end{matrix}$	231.203
4	$\left.\begin{matrix} g_2 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 4{\cdot}7528 \\ g_3 = 2{\cdot}0291 \\ g_7 = 0{\cdot}2181 \end{matrix}$	304.780	8	$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_6 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_4 = 5{\cdot}6041 \\ g_5 = 0{\cdot}2816 \\ g_7 = 1{\cdot}1143 \end{matrix}$	277.107

Die Normalgleichungen lauten:

$$558.445x - 5584 = 0,$$
$$558.445y - 5798 = 0,$$

aus denen sich die Korrektionen der Näherungskoordinaten:

$$x = + 0{\cdot}010_0\, m,$$
$$y = + 0{\cdot}010_4\, m$$

ergeben; damit hat man als endgiltige Koordinaten für den Punkt K:

$$x_K = 1512{\cdot}110\, m,$$
$$y_K = 1547{\cdot}497\, m.$$

Die weitere Rechnung ergibt der Reihe nach als mittleren Fehler der Gewichtseinheit:

$$m = \pm 1{\cdot}47'',$$

als Halbmesser des Fehlerkreises:

$$R_0 = A = B = m_x = m_y = \pm 0{\cdot}002,_0\, m$$

und schließlich als mittleren Punktfehler:

$$M = \pm 0{\cdot}002,_8\, m.$$

Zu bemerken ist, daß von einer Gegenüberstellung der beiden Ausgleichungsergebnisse in diesem Falle strenge genommen nicht gesprochen werden kann; denn, es werden bei der zweiten Ausgleichung dieselben Widersprüche l verwendet, welche sich aus den Beobachtungen ergeben haben, die ohne auf die günstigste Gewichtsverteilung Rücksicht zu nehmen, ausgeführt wurden. Zweifellos wird man aber geringeren Widersprüchen l begegnen, wenn, wie dies im folgenden Beispiele der Fall ist, für die Lage des Neupunktes Bestimmungselemente vorhanden sind, deren Messung sich in Hinblick auf die günstigste Gewichtsverteilung vollzogen hat; demzufolge werden sich dann auch der Fehlerkreis und damit der mittlere Punktfehler kleiner ergeben.

2. Rückwärtseinschneiden aus sieben Punkten.

Bestimmung des Punktes S_W (Südwestpfeiler am Observatorium der Technischen Hochschule Graz) aus sieben gegebenen Punkten.

Die hiezu notwendigen Angaben finden sich in der nachstehenden Tabelle. Die Beobachtungen sind gleich genau; sie sind die arithmetischen Mittel aus fünf Richtungssätzen. Wir erteilen jeder das Gewicht $g = 1$, somit ist die Summe der Beobachtungsgewichte durch $[g] = 7$ gegeben.

	Gegebene Punkte:						
	1 (Hilmwarte)	2 (Domkirche)	3 (St. Peterkirche)	4 (Josefkirche)	5 (Stadtpfarrkirche)	6 (Lisl-Schloßberg)	7 (Reinerwarte)
	Koordinaten						
x	+12,551·85	+ 14,027·69	+ 15,914·48	+ 15,501·26	+ 14,323·95	+ 13,582·17	+ 11,517·39
y	+ 58·86	+ 1,795·64	− 719·28	+ 1,857·31	+ 1,875·18	+ 2,161·63	+ 2,461·63
	Innere Richtungen						
	0° 0′ 0·0″	268° 10′ 56·1″	97° 31′ 7·0″	179° 45′ 55·0″	243° 6′ 20·7″	277° 31′ 29·7″	304° 22′ 9·8″

Als Näherungskoordinaten für den Punkt S_W ergeben sich:

$$x_0 = + 14{,}379{\cdot}7\ m,$$
$$y_0 = + 1{,}177{\cdot}2\ m,$$

womit folgende Fehlergleichungen erhalten werden:

$$\begin{aligned}
v_1 &= - 50{\cdot}2x + 82{\cdot}1y + z - 11{\cdot}7,\\
v_2 &= + 251{\cdot}9x + 143{\cdot}4y + z + 10{\cdot}5,\\
v_3 &= - 65{\cdot}7x - 53{\cdot}2y + z + 3{\cdot}4,\\
v_4 &= + 81{\cdot}5x - 134{\cdot}5y + z + 15{\cdot}3,\\
v_5 &= + 293{\cdot}6x + 23{\cdot}5y + z - 7{\cdot}1,\\
v_6 &= + 126{\cdot}6x + 102{\cdot}5y + z + 0{\cdot}0,\\
v_7 &= + 26{\cdot}9x + 60{\cdot}0y + z + 0{\cdot}1.
\end{aligned}$$

Aus den zugehörigen reduzierten Normalgleichungen:

$$116.776x + 24.776y + 1.136 = 0,$$
$$24.776x + 55.727y - 2.190 = 0$$

folgen die Korrektionen x und y der Näherungskoordinaten:

$$x = - 0{\cdot}020\ m,$$
$$y = + 0{\cdot}048\ m,$$

womit die ausgeglichenen Koordinaten des Punktes S_W:

$$x_{S_W} = + 14.379{\cdot}680\ m,$$
$$y_{S_W} = + 1.177{\cdot}248\ m$$

erhalten werden. In weiterer Folge bekommt man:

$$m = \pm 10{\cdot}00''; \ m_x = \pm 0{\cdot}030_7\ m; \ m_y = \pm 0{\cdot}044_5\ m \ \text{und} \ M = \pm 0{\cdot}054_1\ m$$

Als Bestimmungselemente für die Fehlerellipse finden wir:

$$\varphi = 109^0\ 31'\ 58''; \ A = m_{\max} = \pm 0{\cdot}046_1\ m; \ B = m_{\min} = \pm 0{\cdot}028_2\ m.$$

Zwecks Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung ist in den einschlägigen Formeln 37), 38) und 41), da die Summe der Beobachtungsgewichte sieben beträgt, für den vorgegebenen Arbeitsaufwand $K = 7$ zu setzen.

Man geht nun versuchsweise vor, nimmt drei Gewichte — g_2, g_5, g_7 — mit Null an und ermittelt die restlichen vier Gewichte g_1, g_3, g_4, g_6.

Als Hilfsgleichung benützen wir die siebente der Gleichungen 41):

$$188{\cdot}3 = -50{\cdot}2\,g_1 - 65{\cdot}7\,g_3 + 81{\cdot}5\,g_4 + 126{\cdot}6\,g_6,$$

womit sich unter Benützung der dritten Gleichung 38):

$$g_1 + g_3 + g_4 + g_6 = 7$$

die Gewichte g_1 und g_3 mit:

$$g_1 = -9{\cdot}4985\,g_4 - 12{\cdot}4088\,g_6 + 41{\cdot}8267,$$
$$g_3 = +8{\cdot}4985\,g_4 + 11{\cdot}4088\,g_6 - 34{\cdot}8267$$

ergeben.

Durch Einsetzen dieser Werte für g_1, und g_3 in die beiden ersten Gleichungen 38) gelangt man zu den zwei Gleichungen:

$$-58\,g_4^2 + 662.978\,g_4 - 88\,g_6^2 + 1{,}015.342\,g_6 - 134\,g_4 g_6 - 3{,}055.152 = 0,$$
$$+1{,}868.786\,g_4^2 - 14{,}172.233\,g_4 + 2{,}322.922\,g_6^2 - 15{,}598.695\,g_6 + 4{,}166.983\,g_6 + $$
$$+ 26{,}342.273 = 0.$$

Daraus folgen g_4 und g_6, womit aber auch g_1 und g_3 bestimmt sind. Man erhält als Gewichtsverteilung:

$$g_1 = 0{\cdot}0614,\quad g_3 = 2{\cdot}8311,\quad g_4 = 3{\cdot}1625,\quad g_6 = 0{\cdot}9450,\qquad g_2 = g_5 = g_7 = 0;$$

damit wird $F = 43.464.$

Auf Grund der soeben ermittelten Gewichtszahlen kann nun der Beobachtungsplan wie folgt aufgestellt werden.

Als Gewichtseinheit hatten wir das Mittel aus fünf Richtungssätzen angenommen; somit umfaßt der gesamte Arbeitsaufwand 35 Einstellungen in jeder Kreislage, demnach also 70 Einstellungen.

In Hinblick auf die Gewichtszahlen sind nun die Beobachtungen der in Betracht kommenden Richtungen nach den Punkten 1, 3, 4 und 6 in der nachstehenden Weise durchzuführen. Es ist:

die Richtung nach dem Punkte 1 aus einer Einstellung,
„ „ „ „ „ 3 „ 28 Einstellungen,
„ „ „ „ „ 4 „ 32 „
und „ „ „ „ „ 6 „ 9 „

abzuleiten, wobei wie früher abwechselnd in beiden Kreislagen zu beobachten ist.

Die dementsprechend durchgeführten Messungen ergeben als innere Richtungen von dem Punkte S_{IV}

nach dem Punkte 1 . . . . 131° 34′ 13·5″,
„ „ „ 3 . . . . 229° 05′ 26·4″,
„ „ „ 4 . . . . 311° 20′ 15·2″,
„ „ „ 6 . . . . 49° 05′ 47·6″.

Die nun folgende Ausgleichungsrechnung, welche unter Benützung dieser Beobachtungsergebnisse, denen die vorher berechneten Gewichtszahlen entsprechen, durchgeführt wird, gestaltet sich wegen der Nebenbedingungen

$$[gab\,1] = 0 \text{ und}$$
$$[gaa\,1] = [gbb\,1]$$

verhältnismäßig einfach.

Als Fehlergleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\ \ 50{\cdot}2\,x + \ \ 82{\cdot}1\,y + z - \ \ 7{\cdot}3, \\ v_3 &= -\ \ 65{\cdot}7\,x - \ \ 53{\cdot}2\,y + z + \ \ 1{\cdot}9, \\ v_4 &= +\ \ 81{\cdot}5\,x - 134{\cdot}5\,y + z + 13{\cdot}0, \\ v_6 &= + 126{\cdot}6\,x + 102{\cdot}5\,y + z + \ \ 0{\cdot}0. \end{aligned}$$

Die reduzierten Normalgleichungen lauten:

$$43.464\,x + 1.782 = 0,$$
$$43.464\,y - 2.734 = 0,$$

woraus die Korrektionen der Näherungskoordinaten

$$x = -\,0{\cdot}041\ m,$$
$$y = +\,0{\cdot}063\ m$$

und damit als endgiltige Koordinaten für den Punkt S_{IV}:

$$x_{S_{IV}} = +\ 14.379{\cdot}659\ m,$$
$$y_{S_{IV}} = +\ \ 1.177.263\ m$$

folgen. Schließlich erhält man:

$$m = \pm\,0{\cdot}43'',$$
$$R_0 = A = B = m_x = m_y = \pm\,0{\cdot}002_1\ m \text{ und}$$
$$M = \pm\,0{\cdot}0029\ m.$$

Zu diesem Beispiele wäre noch zu bemerken, daß, wie bei dem vorhergehenden, mit allen möglichen Kombinationen der Gewichte der Rechnungsvorgang durchzuführen ist, wobei gegebenenfalls eine andere der Gleichungen 41) als Hilfsgleichung zu benützen sein wird. Wie immer ist dann jene Gewichtsverteilung als die vorteilhafteste zu bezeichnen und beizubehalten, mit welcher der größte Wert in F erreicht wird.

Schlußbetrachtung.

Die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung kann jederzeit, sobald nur die Lage des Neupunktes ungefähr bekannt ist — gegebenenfalls auf Grund einer Triangulierungsnetzkarte — vorgenommen werden. Wir benötigen hiezu lediglich außer dem durch die Summe der Messungsarbeiten gegebenen Arbeitsaufwand die Richtungskoeffizienten a und b, welche bekanntlich auf verschiedene Arten entweder rechnerisch oder unter Verwendung von Hilfstafeln bestimmt werden können.

Die Bestimmung der Gewichtsverteilung hat vor Beginn der Feldarbeiten zu erfolgen und ist im wesentlichen der Zimmerarbeit vorbehalten.

Ist die vorteilhafteste Gewichtsverteilung ermittelt, sind somit die für die Bestimmung des Neupunktes in Betracht kommenden Richtungen samt ihren Gewichten bekannt, so ist anschließend der entsprechende Beobachtungsplan anzulegen.

Die Aufstellung des Beobachtungsplanes geht am einfachsten unter Benützung der Anschnittszahlen vor sich; dabei hat man sich zuerst über die Gewichtseinheit zu entscheiden z. B. eine Einstellung in beiden Kreislagen. Die einschlägigen Richtungen sind dann im entsprechenden Verhältnisse ihrer Gewichte zur Gewichtseinheit der Beobachtung zu unterziehen.

In den Fällen der Anwendung sind aber auch für die Anlage eines rationellen Beobachtungsplanes die mit der Ausführung der Beobachtungen verbundenen Arbeiten wie Anzahl der Instrumentenaufstellungen, Größe des Zeitaufwandes und des zurückzulegenden Weges von ausschlaggebender Bedeutung. Man wird daher zu überlegen haben, inwieweit in einzelnen Fällen erhöhter Zeit- und Geldaufwand anzubringen ist, um den Bedingungen der vorteilhaftesten Gewichtsverteilung zu genügen. Manchmal wird sich in Hinblick auf die zuletzt genannten Gesichtspunkte eine andere Gewichtsverteilung als die günstigste vorteilhafter erweisen, obwohl damit die Bestimmung des Neupunktes an Genauigkeit leidet.

Nach Abschluß der Feldarbeiten, die entsprechend dem ausgearbeiteten Beobachtungsplan ausgeführt wurden, ist mit diesen Beobachtungsergebnissen, welchen die vorher ermittelten Gewichtszahlen zukommen, die Berechnung der Koordinaten des Neupunktes nach den Regeln der Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen ungleicher Genauigkeit vorzunehmen.

Die mitgeteilten Beispiele geben ein klares Bild, inwieweit unsere günstigste Gewichtsverteilung den bestehenden Genauigkeitsuntersuchungen bezüglich der richtigen Auswahl der Netzrichtungen Rechnung trägt. Wir ersehen daraus, daß allen jenen Richtungen Gewichte erteilt werden, also entsprechenden Messungen unterzogen werden müssen, welche sich auf den ersten Blick auf Grund bekannter Untersuchungen als die Besten ergeben oder doch mindestens den diesbezüglichen Bedingungen am nächsten stehen.

Die vorstehenden Erörterungen mögen somit ein Beitrag sein zur Genauigkeitsüberlegung, welche jeder endgültigen Bestimmung und Ausgleichung eines Punktes voranzugehen hat, um die besten Bestimmungsstrahlen zu finden und die Gesamtanlage und Auswahl der Messungen entsprechend anzuordnen.

Graz, im Juli 1923.

Zur trigonometrischen Höhenmessung.

Von Prof. HEINRICH HAIDL in Oberhollabrunn.

Die trigonometrisch gemessenen Höhenunterschiede werden nach der Formel

$$h = a \operatorname{cotg} z + \frac{1-k}{2r} a^2 = I + II \qquad \ldots\ldots 1)$$

berechnet, worin a die horizontale Entfernung zwischen Stand- und Zielpunkt, gemessen in der Höhe des Landeshorizontes, z die Zenitdistanz, k die Vorzahl der Strahlenbrechung und r den Erdhalbmesser bedeuten.