

Paper-ID: VGI_191509



Über Fehlerhyperbeln

Siegmund Wellisch ¹

¹ *Bauinspektor der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **13** (5, 6, 7), S. 80–81, 94–98, 109–114

1915

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_191509,  
Title = {"\U}ber Fehlerhyperbeln},  
Author = {Wellisch, Siegmund},  
Journal = {"\O}sterreichische Zeitschrift f{"\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {80--81, 94--98, 109--114},  
Number = {5, 6, 7},  
Year = {1915},  
Volume = {13}  
}
```



Über Fehlerhyperbeln.

Von S. Wellisch.

1.

Seit Bravais 1846 die ersten eingehenden Untersuchungen über die Fehler in der Bestimmung eines Punktes in der Ebene und im Raume angestellt und damit die Theorie der Fehlerellipsen und Fehlerellipsoide begründet hat, bilden diese Kurven und Flächen gleicher Wahrscheinlichkeit die vorzüglichsten geometrischen Gebilde zur Kennzeichnung der Genauigkeit in der Lagenbestimmung eines Punktes in der Ebene und im Raume. Nun haben die neuesten Forschungen auf diesem Gebiete ergeben, daß auch die Hyperbeln und Hyperboloide zur Darstellung des Genauigkeitsgrades linearer Funktionen, welche die Lage einer Geraden in der Ebene, beziehungsweise einer Ebene im Raume bestimmen, herangezogen werden können.

In der von Alfred Basch der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien am 9. Juli 1914 vorgelegten Studie «Ueber Hyperbeln, beziehungsweise Hyperboloide als Präzisionscharakteristika empirisch bestimmter linearer Funktionen» handelt es sich hauptsächlich um die auf Grund von Beobachtungen vorzunehmende Bestimmung des funktionellen Zusammenhanges zweier Größen, von denen eine als vollkommen fehlerlos und nur die andere mit einem zufälligen Fehler behaftet anzunehmen ist, also um Fälle, die bei experimentellen Untersuchungen, namentlich im Gebiete der Physik, aufzutreten pflegen. In der Geodäsie hat man es jedoch vorwiegend mit Problemen zu tun, worin beide zu bestimmenden, in einem funktionellen Zusammenhange stehenden Größen in gleicher Weise mit zufälligen Fehlern behaftet erscheinen, wo also die oben gemachte Einschränkung nicht besteht. In ihrer Anwendung auf die Geodäsie erfordert demgemäß die Theorie der Fehlerhyperbel eine entsprechende Anpassung und Erweiterung.

Die von Basch angestellten Untersuchungen nehmen ihren Ausgang von der bekannten Aufgabe, im Falle des wechselseitigen Zusammenhanges zweier Größen x, y , welche die Fähigkeit besitzen, verschiedene Werte anzunehmen, auf Grund der Kenntnis einer überschüssigen Anzahl von Wertepaaren dieser Größen diejenige lineare Funktion $y = ax + b$ zu ermitteln, durch welche die Bestimmung der einen Größe aus der anderen mit dem geringsten Fehlerrisiko verbunden ist. Es wird zunächst die Gleichung der diese Funktion darstellenden Geraden, der «plausibelsten Regressionslinie» aufgestellt und der Satz bewiesen, daß diese Regressionslinie (Schaulinie) jener Durchmesser der Zentralellipse des das System sämtlicher Beobachtungspaare versinnlichenden «Beobachtungsbildes» ist, welcher zur Richtung der die gesuchte Größe zur Darstellung bringenden Koordinate konjugiert ist.

Bestimmt man die Einhüllende jener Geradenschar, deren einzelne Geraden die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, «wahre Schaulinie» zu sein, so erhält man eine Schar von Hyperbeln, welche von Basch als «Fehlerhyperbeln» bezeichnet werden. Die Schaulinie ist dann der, sämtliche Fehlerhyperbeln in denselben zwei imaginären Punkten schneidende Durchmesser, der zu jener Richtung,

welche die gesuchte Größe darstellt, konjugiert ist. Diejenige Hyperbel, für welche die Wahrscheinlichkeit, von der «wahren Schaulinie» imaginär oder reell geschnitten zu werden, gleich groß ist, wird die «wahrscheinliche Fehlerhyperbel» genannt, während jene Hyperbel, welche im Falle einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen die Zentralellipse in zwei Punkten tangiert und die Eigenschaft besitzt, daß ihren Tangenten in ihrer Gesamtheit die größte Wahrscheinlichkeit zukommt, die «wahre Schaulinie» zu sein, als «mittlere Fehlerhyperbel» bezeichnet wird. Im Hinblick auf die analoge Bezeichnungsweise der Fehlerellipsen wäre jedoch diese Hyperbel besser als «Zentralhyperbel» anzusprechen.

Von Basch wird auch der Fall des korrelativen Zusammenhanges zwischen drei Größen behandelt, die Gleichung der «Regressionsebene» aufgestellt und das «Fehlerhyperboloid» in den Kreis der Untersuchungen gezogen.

Demnach erscheinen die Fehlerhyperbeln und Fehlerhyperboloide als ein Mittel zur Kennzeichnung der Genauigkeit in der Lagenbestimmung einer Geraden in der Ebene, beziehungsweise einer Ebene im Raume, ähnlich den Fehlerellipsen und Fehlerellipsoiden als Präzisionsmerkmale für die Genauigkeit der Lagenbestimmung eines Punktes in der Ebene und im Raume.

In der praktischen Geometrie könnte die Theorie der Fehlerhyperbel Anwendung finden bei Aufgaben von Punktbestimmungen durch Einschneiden z. B. bei der Aufgabe der unzugänglichen Distanz, dem «Hansen'schen Problem» oder der gleichzeitigen trigonometrischen Festlegung eines Punktpaares.

Werden zwei Punkte von mehr als je zwei gegebenen Punkten vorwärts eingeschnitten, so ist die durch die beiden Punkte begrenzte Strecke nach Länge und Lage überbestimmt. Für die Genauigkeitsangabe in der Bestimmung der beiden, für sich allein betrachteten Streckenendpunkte bilden dann die Fehlerellipsen ein geeignetes Mittel; die Bestimmung der gegenseitigen Lage beider Punkte zu einander wird aber als umso genauer zu erklären sein, je näher die Aeste der charakteristischen Fehlerhyperbel an die berechnete Lage der festzulegenden Strecke herantreten und je flacher gleichzeitig die Fehlerhyperbel verläuft, indem die beiden Hyperbeläste, gleichsam wie zwei Puffer wirkend, das Streuungsfeld der gesuchten Strecke beschränken.

(Fortsetzung folgt.)

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechungen.

Zur Rezension gelangen nur Bücher, welche der Redaktion der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen zugesendet werden.

Vincenz Pollack, ehem. Bauinspektor des k. k. Eisenbahnministeriums und a. o. Professor an der k. k. Techn. Hochschule in Wien: Kurze praktische Geometrie (Vermessungskunde) für Vorarbeiten von Verkehrs- und ähnlichen Anlagen. Wien 1914, Verlag für Fachliteratur, Ges. m. b. H. Preis gebunden 24 Kronen. (254 Seiten.)

Pollack's Kurze praktische Geometrie im Formate $47 \times 31 \text{ cm}$ besteht zum großen Teile aus wörtlichen Abschriften aus den bekannten Lehr- und Handbüchern der

dieser verschiedenen Auffassungen ein und desselben Signales in ähnlicher Weise abspielen, indem der Beobachter bei schlechter Sichtbarkeit des Signales immer veranlaßt sein wird, den Schwerpunkt der sichtbaren (beleuchteten) Fläche anzuvisieren, und das umso mehr, je weniger die Distanz- oder Luftverhältnisse die scharfe Umrandung des Signals, besonders auch der Schattenpartien, erkennen lassen.

(Fortsetzung folgt.)

Über Fehlerhyperbeln.

Von S. Wellisch.

2.

In Gemäßheit der wesentlichen Unterscheidung zwischen den wechselseitigen Zusammenhängen der bei geodätischen Punktbestimmungen in Betracht kommenden Größen und von empirisch bestimmten Funktionen hat man es bei geodätischen Problemen statt nach Basch's Auffassung mit einem Paare von «Regressionslinien» nur mit einer einzigen «Schaulinie» und dementsprechend auch nur mit einer einzigen Schar von Fehlerhyperbeln zu tun. Hingegen erscheint es notwendig, daß zu den gegenständlichen Betrachtungen statt einer einzigen Fehlerellipse ein Paar von Fehlerellipsen samt den zugehörigen Fußpunktskurven oder Pedalen herangezogen werden.

Sind für den Fall der trigonometrischen Festlegung einer Dreiecksseite $P'P''$ durch Vorwärtseinschneiden die Beobachtungen mit zufälligen Fehlern behaftet, so wird an Stelle der Punkte P', P'' je eine fehlerzeigende Figur entstehen. Durch Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man die wahrscheinlichsten Lagen der Dreieckspunkte, die Kernpunkte der zu ihrer Festlegung beobachteten zwei Strahlensysteme. Zu jedem Kernpunkt gehört eine Schar von Fehlerellipsen, von denen wir diejenige, welche in bezug auf den Schwerpunkt eines Punktsystems «Zentralellipse» genannt wird, als «Kernellipse» bezeichnen wollen. Die ausgeglichene Strecke $P'P''$ (Schaulinie) mit ihren Fehlerfiguren und Kernellipsen stellt das Beobachtungsbild in natürlicher Gestalt dar. Um es in eine für die Konstruktion der Fehlerhyperbeln geeignete Form zu bringen, wird die Strecke $P'P''$ in einem schicklichen Maßverhältnisse, z. B. 1:2500 verjüngt, wodurch das verkürzte Beobachtungsbild entsteht. Nun berechne man nach Anleitung der in meinem Buche: «Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung», II. Bd., § 9, gegebenen Entwicklungen folgende Elemente:

1. Den Südwinkel der Schaulinie aus

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{Y' - Y''}{X' - X''} \dots \dots \dots 1)$$

und die Länge der Schaulinie

$$s = \frac{Y' - Y''}{\sin \sigma} = \frac{X' - X''}{\cos \sigma},$$

wo $Y' - Y''$ und $X' - X''$ die Koordinatenunterschiede der ausgeglichenen Dreiecksseite bedeuten. Ferner für beide Punkte gesondert:

2. Den mittleren Fehler einer einzelnen Richtungsbeobachtung unter Zugrundelegung der scheinbaren Beobachtungsfehler:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \quad \dots \quad (2)$$

3. Die mittleren Koordinatenfehler in bezug auf das durch den Kernpunkt parallel zu x, y gelegte Achsenkreuz:

$$\mu_x^2 = \mu_0^2 \frac{[bb]}{D}, \quad \mu_y^2 = \mu_0^2 \frac{[aa]}{D}, \quad \dots \quad (3)$$

worin $D = [aa][bb] - [ab]^2$ die Koeffizienten-Determinante der Normalgleichungen bedeutet.

4. Die Azimute ψ und $\psi + 90^\circ$ der Wahrscheinlichkeitshauptachsen oder die Südwinkel der Achsen der Kernellipse aus:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]} \quad \dots \quad (4)$$

5. Die extremen Werte der mittleren Koordinatenfehler oder die auf die Ellipsenachsen bezogenen mittleren Fehlerkomponenten aus den Formeln

$$\mu_x^2 = \mu_0^2 \frac{[bb]}{D}, \quad \mu_y^2 = \mu_0^2 \frac{[aa]}{D} \quad \dots \quad (5)$$

$$[aa] = \frac{[aa] + [bb] + W}{2}, \quad [bb] = \frac{[aa] + [bb] - W}{2}$$

$$W^2 = ([aa] - [bb])^2 + 4[ab]^2.$$

6. Den mittleren Fehler in der Richtung der Schaulinie aus der Gleichung der Pedale der Ellipse (vergl. a. a. O. II. Bd., § 10)

$$\mu_\psi^2 = \mu_x^2 \cos^2 \varepsilon + \mu_y^2 \sin^2 \varepsilon, \quad \dots \quad (6)$$

wenn $\varepsilon = 90^\circ - \sigma + \psi$ den Winkel bedeutet, den die Schaulinie mit der positiven großen Halbachse der Kernellipse bildet.

7. Den mittleren Fehler in der zur Schaulinie konjugierten Richtung aus der Gleichung der Pedale

$$\mu_\delta^2 = \mu_x^2 \cos^2 \delta + \mu_y^2 \sin^2 \delta, \quad \dots \quad (7)$$

wo δ der aus $\operatorname{tg} \delta = -\frac{\mu_x^2}{\mu_y^2 \operatorname{tg} \varepsilon}$ zu berechnende Winkel ist, den der konjugierte Radius mit der großen Halbachse einschließt und wobei $\varphi = \varepsilon - \delta$ den Konjugationswinkel darstellt, wenn auf das Vorzeichen von ε und δ Bedacht genommen wird.

Von den nach den Punkten 2) bis 7) zu berechnenden Größen erhält man für jede Kernellipse besondere Werte, die zur Unterscheidung entsprechend der Punktbezeichnung P', P'' mit einem Indexstrich, beziehungsweise mit zwei Strichen zu versehen sein werden.

Während die beiden in der Richtung der Schaulinie auftretenden Fehler, die in ihrer Zusammenwirkung den «Entfernungsfehler» der Dreiecksseite ergeben, in jedem Punkte der Dreiecksseite im vollen Betrage zu der Zusammenwirkung teilnehmen, tragen die beiden Fehler in den konjugierten Richtungen zu der

Zusammensetzung des resultierenden konjugierten Querfehlers in irgend einem Punkte der Dreiecksseite bloß mit einem Anteil bei, der gegenseitig von einem Dreieckspunkte gegen den anderen vom vollen Betrage bis auf Null allmählich abnimmt, so daß an irgend einer Stelle — den Kernpunkt K des Beobachtungsbildes — die Resultierende des konjugierten Querfehlers ein Minimum sein wird. Die Lage des Kernpunktes K ist bestimmt durch einen der Abstände $KP' = i$ oder $KP'' = j$ von den Dreieckspunkten. Von dem Mittelpunkt M , d. i. dem Halbierungspunkte von $P'P''$, ist dann der Kernpunkt K um $i - \frac{s}{2} = \frac{s}{2} - j$ entfernt. Mit Berücksichtigung der den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportionalen Gewichte g' und g'' bei den Punkten P' und P'' berechnet sich der Abstand i aus der Gleichung $ig' = jg''$ mit

$$i = \frac{s}{1 + \frac{g'}{g''}} = \frac{s}{1 + \left(\frac{\mu_n''}{\mu_n'}\right)^2} \dots \dots \dots 8)$$

es ist dann $j = s - i$ und es sind die zu dem resultierenden konjugierten Querfehler in K beitragenden Fehlerteile:

$$\frac{j\mu_n'}{s} \text{ und } \frac{i\mu_n''}{s}$$

Bildet man nun aus beiden mittleren Fehlerpaaren in der Richtung der Schaulinie und ihren konjugierten Richtungen nach dem «pythagoräischen Lehrsatz der Ausgleichsrechnung» die Mittelwerte aus

$$m_b^2 = \mu_b'^2 + \mu_b''^2 \dots \dots \dots 9)$$

$$m_a^2 = \frac{(j\mu_n')^2 + (i\mu_n'')^2}{s^2} \dots \dots \dots 10)$$

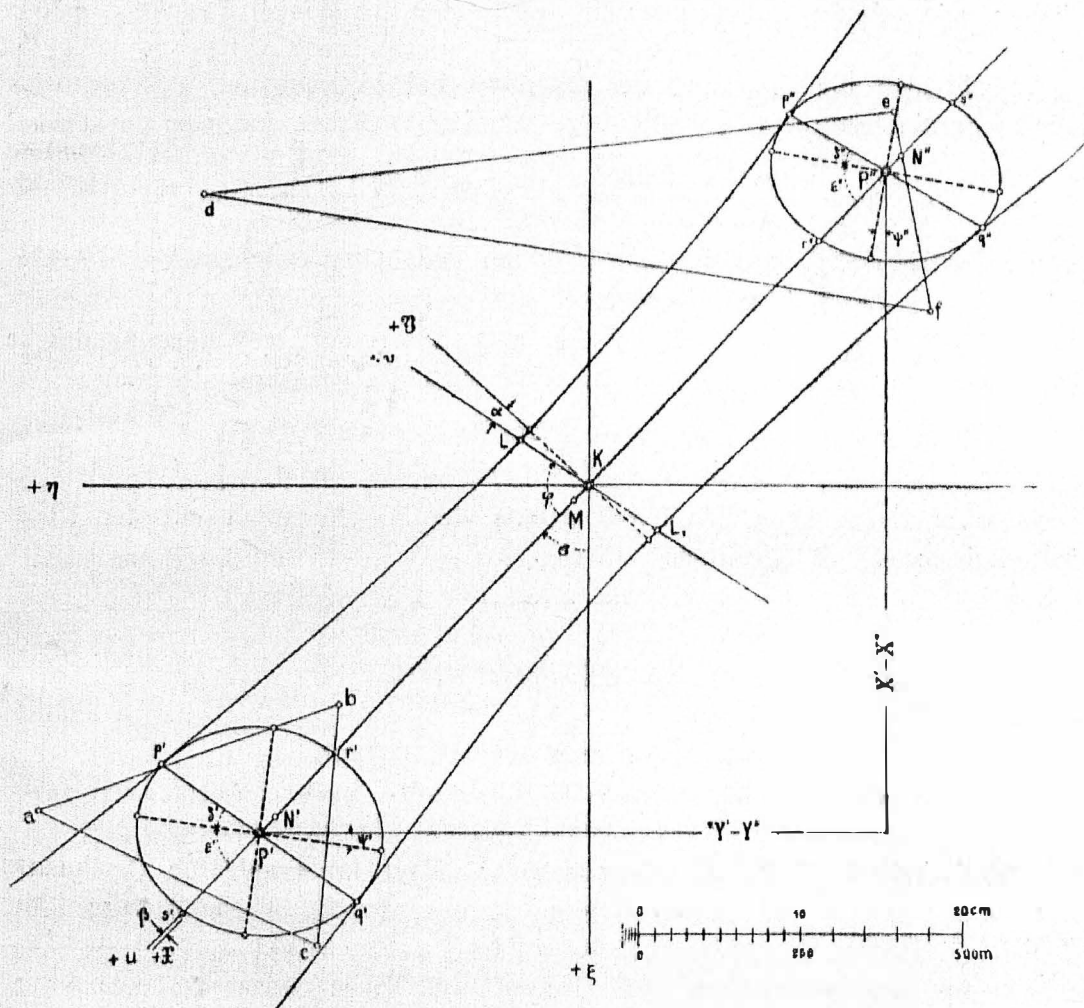
so stellen diese Mittelwerte die mittleren Fehler des Kernpunktes K des Beobachtungsbildes in den Richtungen der konjugierten Durchmesser einer Hyperbel dar, die wir zum Unterschiede von der auf den Schwerpunkt des Beobachtungsbildes sich beziehenden «Zentralhyperbel» als «Mittelhyperbel» bezeichnen. Der mittlere Fehler $m_a = KL = KL_1 = a$ ist zugleich die Länge des reellen konjugierten Halbmessers der Mittelhyperbel, während ihr imaginärer konjugierter Halbmesser $KN' = KN'' = b$ aus der auf die konjugierten Durchmesser als schiefwinkelige Koordinatenachsen v, u bezogenen Gleichung der Mittelhyperbel

$$\frac{v^2}{a^2} - \frac{u^2}{b^2} = 1 \dots \dots \dots 11)$$

wie folgt erhalten wird. Es ist $b = \frac{ua}{\sqrt{v^2 - a^2}}$. Da nebst $a = m_a$ auch die schiefwinkligen Koordinaten i, μ_n' und j, μ_n'' der Hyperbel- und Pedalenpunkte p', p'' , beziehungsweise q', q'' vorliegen, so erhält man für b zwei nur vielleicht in der siebenten Logarithmenstelle abweichende Werte, nämlich

$$b' = \frac{j m_a}{\sqrt{\mu_n'^2 - m_a^2}} \text{ und } b'' = \frac{i m_a}{\sqrt{\mu_n''^2 - m_a^2}} \dots \dots \dots 12)$$

deren arithmetisches Mittel δ ergibt. Die Asymptoten der Mittelhypsel gehen durch die vier Winkelpunkte eines Parallelogramms, dessen Seiten die Länge der konjugierten Durchmesser der Mittelhypsel besitzen und mit ihnen parallel laufen. Einzelne Punkte der Hypsel findet man leicht durch Anwendung des Satzes, daß die Fläche des Parallelogramms aus den Koordinaten irgend eines Punktes der Hypsel — mit den Asymptoten parallel gezogen — beständig bleibt.



17 . 1.

Um die Halbachsen der Mittelhypsel zu erhalten, transformiere man die schiefwinkligen Koordinaten v, z auf das einzig mögliche System konjugierter Durchmesser, welches rechtwinklig ist. Bezeichnet man die Koordinaten in bezug auf dieses rechtwinklige Achsensystem mit $\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}$, so hat die Achsengleichung der Mittelhypsel die Gestalt

$$\frac{\mathfrak{Y}^2}{\mathfrak{A}^2} - \frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{B}^2} = 1 \dots \dots \dots 13)$$

und es finden, wenn $\varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$ den Konjugationswinkel des schiefwinkligen Achsensystems bedeutet, die Beziehungen statt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{B} &= ab \sin \varphi \\ \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2 &= b^2 - a^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 14)$$

woraus die Halbachsen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ berechnet werden können. Der zwischen der v -Achse und \mathfrak{V} -Achse gelegene Winkel α wird aus der Bedingungsgleichung

$$a^2 \sin 2\alpha + b^2 \sin 2(\varphi - \alpha) = 0 \dots \dots \dots 15)$$

erhalten. Die u -Achse schließt dann mit der \mathfrak{X} -Achse den Winkel $\beta = 90^\circ - \varphi + \alpha$ ein.

Sucht man die Gleichung der Mittelhyperbel in bezug auf das rechtwinkelige Koordinatensystem η, ξ mit dem Ursprung in K , so hat man zu setzen:

$$v = \frac{\eta \cos \sigma - \xi \sin \sigma}{\sin \varphi}, \quad u = \frac{\eta \sin \gamma + \xi \cos \gamma}{\sin \varphi},$$

wenn σ der Südwinkel der Schaulinie oder des imaginären Durchmessers (u -Achse) und $\gamma = \varphi + \sigma - 90^\circ$ der Westwinkel des reellen konjugierten Durchmessers (v -Achse) ist, wobei $\sigma + \alpha = \beta + \gamma$ sein muß. Substituiert man diese Ausdrücke für v und u in die Gleichung 11), so erhält man die gesuchte Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} (b^2 \cos^2 \sigma - a^2 \sin^2 \gamma) \eta^2 - (b^2 \sin 2\alpha + a^2 \sin 2\gamma) \eta \xi \\ + (b^2 \sin^2 \sigma - a^2 \cos^2 \gamma) \xi^2 = a^2 b^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 16)$$

welche dazu dienen kann, die Schnittpunkte der Mittelhyperbel mit den Koordinatenachsen η, ξ zu berechnen. (Fortsetzung folgt.)

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechungen.

Zur Rezension gelangen nur Bücher, welche der Redaktion der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen zugesendet werden.

Bibliotheks-Nr. 554. E. Hegemann: «Das topographische Zeichnen». Eine Sammlung von 12 Musterblättern. Zweite, durchgesehene Auflage. Mit 12 Tafeln. Berlin, Verlagsbuchhandlung Paul Parey, 1914.

In dem vorliegenden Buche liegt eine auf zwölf Tafeln zusammengestellte Sammlung von Mustern, die für das Zeichnen von topographischen Plänen notwendig sind, vor. Der Autor hat für die Darstellung der verschiedenen Terraingegenstände die vortrefflichen Vorschriften und Muster der Preußischen Landesaufnahme benützt; der Inhalt der Tabellen über die Bergstriche rührt vom Autor her und hat denselben sehr geschickt bearbeitet. Die Erklärungen zu den Tafeln sind in erwünschter Ausführlichkeit, klar und treffend.

Das vorzüglich ausgestattete Vorlagewerk wird für den Unterricht im Situations- und Planzeichnen sehr gute Dienste leisten und wird zweifellos von Lehrern und Studierenden begrüßt werden. D.

2. Neue Bücher.

Haussner Rob., Prof. Dr.: Darstellende Geometrie. 2. Teil. Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. 2. verm. Aufl. 168 S. m. 88 Fig. Sammlung Göschen Nr. 143. Mk. — 90.

3. Beobachtungsreihe. Nachmittags 352—408.

Witterung: schön, Luft zittert ziemlich stark.

Beleuchtung der Signale: noch anscheinend gleich wie bei der 2. Reihe, nur die beleuchtete Seite der vierseitigen Pyramide erscheint nicht mehr so hell.

Hintergrund: dunstig, aber heller; die Schattenpartien der Pyramiden sind deshalb ebenfalls erkennbar.

4. Beobachtungsreihe. Nachmittags 546—600.

Witterung: schön, nur leichtes Zittern.

Beleuchtung: Die Sonne bildet mit der Richtung der Visur einen Winkel von ca. 160° , d. h. die gegen den Beobachter zugekehrten Seiten der vierseitigen Pyramide sind nicht mehr von direkten Sonnenstrahlen getroffen und auch die linke Seite der dreiseitigen Pyramide steht nur noch im Streiflicht.

Hintergrund: hellgrauer Dunst, die Pyramiden heben sich sehr schlecht ab; ungünstige Zielverhältnisse. Das Stangensignal hebt sich, da es etwas dunkler ist, als die Pyramiden, ein wenig besser ab gegen den Hintergrund. Dagegen verschwindet die Stange in ihrer dunkelgrauen Farbe hinter dem Faden, sodaß die Einstellung etwas unsicher ist.

(Fortsetzung folgt)

Über Fehlerhyperbeln.

Von S. Wellisch.

3.

Nachstehend sei die Genauigkeitsuntersuchung des aus den gegebenen Punkten K, S und H durch Vorwärtseinschneiden festgelegten Punktpaares $P'' P'''$ mittels Fehlerhyperbeln durchgeführt. In Figur 2 ist das Dreiecksnetz im Maßstabe 1 : 50.000 dargestellt, während die Fehlerdreiecke mit den Kernellipsen und die Mittelhyperbel im Maße 1 : 20 eingezeichnet erscheinen. Die feststehenden Koordinaten der gegebenen und die genäherten Koordinaten der zu bestimmenden Punkte sind:

K	$x = -113\ 097\cdot 20\ m$	$y = -14\ 194\cdot 41\ m$
S	$-115\ 651\cdot 17$	$-18\ 152\cdot 94$
H	$-112\ 753\cdot 60$	$-21\ 902\cdot 76$
P''	$-111\ 354\cdot 20$	$-17\ 784\cdot 35$
P'''	$-112\ 370\cdot 94$	$-18\ 755\cdot 74$

Die Vermittlungsgleichungen zur Berechnung der Koordinaten-Verbesserungen $\delta x', \delta y'$ für den Punkt P'' und $\delta x'', \delta y''$ für den Punkt P''' lauten:

$$\begin{array}{l}
 \text{Von } K \text{ nach } P'' \quad . \quad . \quad . \quad + 46\cdot 5 \delta x' + 22\cdot 6 \delta y' - 6\cdot 4 = 0 \\
 \text{» } S \quad \text{» } P'' \quad . \quad . \quad . \quad - 4\cdot 1 \quad \text{»} \quad + 47\cdot 7 \quad \text{»} \quad - 1\cdot 0 = 0 \\
 \text{» } H \quad \text{» } P'' \quad . \quad . \quad . \quad - 44\cdot 9 \quad \text{»} \quad + 15\cdot 3 \quad \text{»} \quad - 1\cdot 4 = 0 \\
 \text{» } K \quad \text{» } P''' \quad . \quad . \quad . \quad + 44\cdot 1 \delta x'' + 7\cdot 0 \delta y'' - 3\cdot 7 = 0 \\
 \text{» } S \quad \text{» } P''' \quad . \quad . \quad . \quad + 11\cdot 2 \quad \text{»} \quad + 60\cdot 8 \quad \text{»} \quad + 4\cdot 5 = 0 \\
 \text{» } H \quad \text{» } P''' \quad . \quad . \quad . \quad - 64\cdot 6 \quad \text{»} \quad + 7\cdot 9 \quad \text{»} \quad - 1\cdot 1 = 0
 \end{array}$$

Die Koeffizienten der Normalgleichungen sind:

Für Punkt	$[aa]$	$[ab]$	$[aw]$	$[bb]$	$[bw]$
P'	4195·1	+ 168·3	— 230·6	3020·2	— 213·7
P''	6243·4	+ 479·4	— 41·7	3808·0	+ 239·0

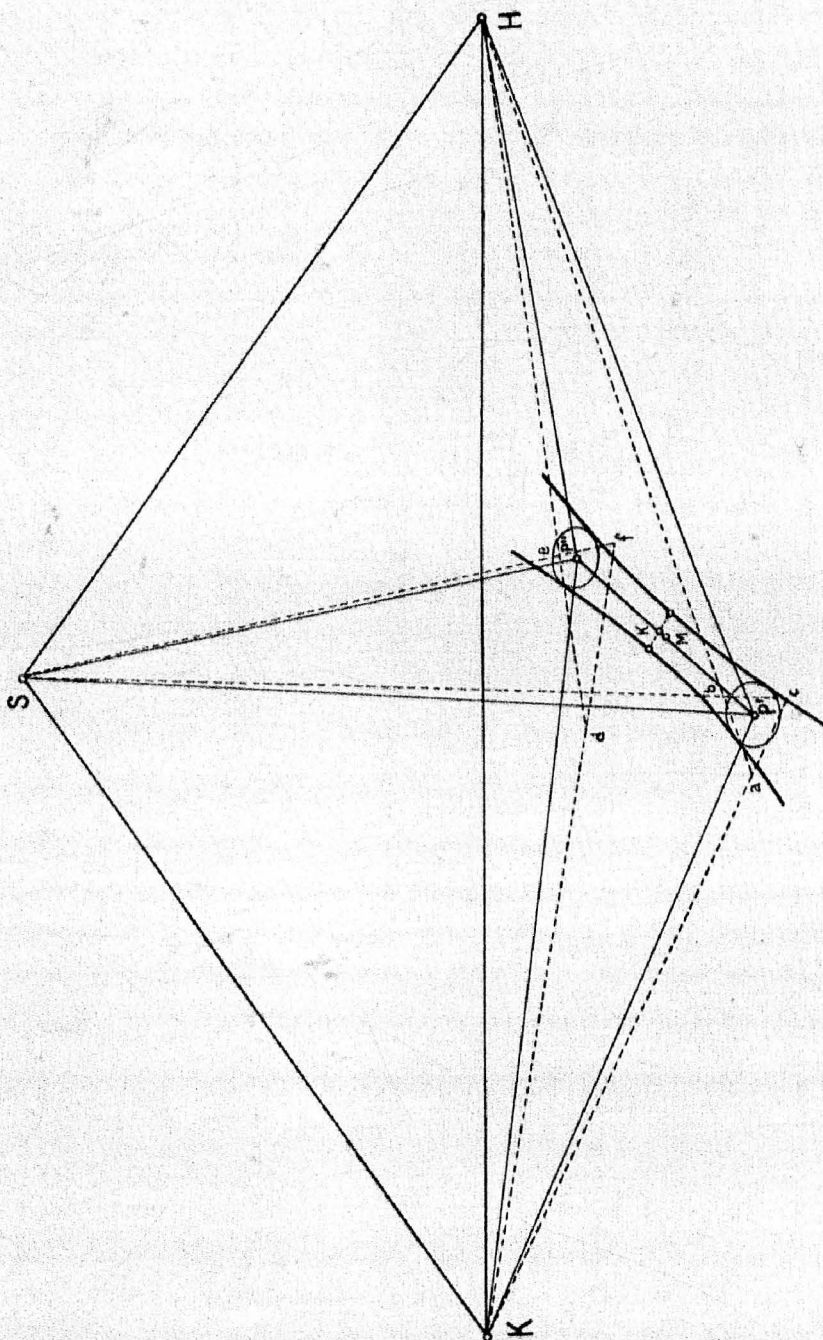


Fig. 2.

Die Koordinaten-Verbesserungen betragen:

$$\begin{aligned} \delta x' &= + 0.0522 \text{ m} & \delta y' &= + 0.0678 \text{ m} \\ \delta x'' &= + 0.0116 \text{ m} & \delta y'' &= - 0.0642 \text{ m} \end{aligned}$$

Die endgültigen Koordinaten von P' , P'' und deren Unterschiede sind:

$$\begin{array}{r} X' = - 111\ 354.1478 \\ X'' = - 112\ 370.9284 \\ \hline X' - X'' = + 1016.7806 \end{array} \quad \begin{array}{r} Y' = - 17784.2822 \\ Y'' = - 18755.8042 \\ \hline Y' - Y'' = + 971.5220 \end{array}$$

Es ist der Südwinkel der Dreiecksseite: $\sigma = 43^\circ 41' 46''$

die Länge der Dreiecksseite: $s = 1406.3065 \text{ m}$.

Nun werden berechnet:

Die Richtungsverbesserungen und deren Quadratsummen:

$$\begin{array}{r} \text{für } P' \dots v' = - 2.440'' \\ \quad + 2.020 \\ \quad - 2.707 \\ \hline [v' v'] = 17.348\ 314 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{für } P'' \dots v'' = - 3.638'' \\ \quad + 0.727 \\ \quad - 2.357 \\ \hline [v'' v''] = 19.319\ 022 \end{array}$$

Die mittleren Fehler einer einzelnen Richtungsbeobachtung:

$$\text{für } P' \dots \mu_0' = 4.1651'', \quad \text{für } P'' \dots \mu_0'' = 4.3953''.$$

Die Koeffizienten-Determinanten:

$$D' = 1264\ 1716 \quad D'' = 2354\ 5043.$$

Die mittleren Koordinatenfehler bezogen auf die durch die Kernpunkte als Koordinatenursprünge gelegten rechtwinkligen Achsen:

$$\begin{array}{r} \text{für } P' \dots \mu'_x = 0.0644 \\ \text{für } P'' \dots \mu''_x = 0.0559 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mu'_y = 0.0759 \\ \mu''_y = 0.0716 \end{array}$$

Die Südwinkel der kleinen Achsen der Kernellipsen:

$$\psi' = 7^\circ 59' 36'' \quad \psi'' = 10^\circ 44' 41''$$

Die mittleren Koordinatenfehler bezogen auf die Achsen der Kernellipsen:

$$\begin{array}{r} \text{für } P' \dots \mu'_x = 0.0641 \\ \text{für } P'' \dots \mu''_x = 0.0552 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mu'_y = 0.0761 \\ \mu''_y = 0.0721 \end{array}$$

Die mittleren Punktfelder zur Rechenprobe:

$$\begin{aligned} M' &= \sqrt{0.0644^2 + 0.0759^2} = \sqrt{0.0641^2 + 0.0761^2} = 0.0995 \\ M'' &= \sqrt{0.0559^2 + 0.0716^2} = \sqrt{0.0552^2 + 0.0721^2} = 0.0908. \end{aligned}$$

Die mittleren Koordinatenfehler bezogen auf die konjugierten Durchmesser der Kernellipsen nach Gleichung 6) und 7):

$$\begin{array}{r} \text{für } P' \dots \varepsilon' = + 54^\circ 17' 50'' \\ \quad \delta' = - 27^\circ 02' 31'' \\ \hline \varphi' = 81^\circ 20' 21'' \\ \mu'_b = 0.0684 \ (8.835\ 2806) \\ \mu'_a = 0.0738 \ (8.867\ 9088) \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{für } P'' \dots \varepsilon'' = + 57^\circ 02' 55'' \\ \quad \delta'' = - 20^\circ 49' 31'' \\ \hline \varphi'' = 77^\circ 52' 26'' \\ \mu''_b = 0.0607 \ (8.783.2335) \\ \mu''_a = 0.0702 \ (8.846\ 2468) \end{array}$$

Die Logarithmen der Ergebnisse sind in Klammern beige setzt.

Die Abstände des Kernpunktes K des Beobachtungsbildes nach 8)

$$i = 738 \cdot 1967 \quad (2 \cdot 868 \ 1721)$$

$$j = 668 \cdot 1098 \quad (2 \cdot 824 \ 8479).$$

Die mittleren Fehler des Kernpunktes K nach 9) und 10)

$$m_a = 0 \cdot 0509 \quad (8 \cdot 706 \ 2928)$$

$$m_b = 0 \cdot 0915 \quad (8 \cdot 961 \ 3277)$$

Die unverkürzte Länge des imaginären Durchmessers der Mittelhyperbel wird als arithmetisches Mittel aus den beiden nach 12) erlangten Ergebnisse:

$$\log b' = 2 \cdot 846 \ 5096, \quad \log b'' = 2 \cdot 846 \ 5098$$

mit $b = 702 \cdot 2790 \text{ m}$ erhalten. Der reelle konjugierte Durchmesser ist $a = 0 \cdot 0509$.

In dem im Maßverhältnisse 1 : 2500 verkürzten Beobachtungsbilde (das in Fig. 1 auf $\frac{1}{18}$ verkleinert ist), beträgt

$$s = 0 \cdot 5625, \quad i = 0 \cdot 2953, \quad j = 0 \cdot 2672, \quad b = 0 \cdot 2809 \quad (9 \cdot 448 \ 5697).$$

Die auf die konjugierten Durchmesser bezogene Gleichung der verkürzten Mittelhyperbel lautet daher

$$\left(\frac{v}{0 \cdot 0509}\right)^2 - \left(\frac{u}{0 \cdot 2809}\right)^2 = 1$$

Ihr Konjugationswinkel ist $\varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2} = 79^\circ 36' 24''$.

Die Halbachsen der verkürzten Mittelhyperbel berechnen sich nach 14)

$$\mathfrak{A} = 0 \cdot 0500 \quad (8 \cdot 699 \ 3327)$$

$$\mathfrak{B} = 0 \cdot 2808 \quad (9 \cdot 448 \ 3450)$$

Die Achsengleichung der verkürzten Mittelhyperbel lautet daher:

$$\left(\frac{\mathfrak{y}}{0 \cdot 0500}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{x}}{0 \cdot 2808}\right)^2 = 1$$

Es ist nach 15): $\sin 2\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+c^2}}$, $c = \frac{b^2 \cos 2\varphi - a^2}{b^2 \sin 2\varphi}$, demnach

der Winkel zwischen der \mathfrak{y} -Achse und v -Achse: $\alpha = -10^\circ 04' 13''$

» » » » \mathfrak{x} - » » u - » : $\beta = +19^\circ 23''$

» » » » η - » » v - » : $\gamma = 33^\circ 18' 10''$,

sohin der Westwinkel der reellen Halbachse: $\gamma - \alpha = \sigma - \beta = 43^\circ 22' 23''$.

Die auf die rechtwinkligen Achsen η, ξ bezogene Gleichung der verkürzten Mittelhyperbel lautet nach 16):

$$205 \cdot 018 \eta^2 - 411 \cdot 354 \eta \xi + 181 \cdot 629 \xi^2 = 1.$$

Im verkürzten Beobachtungsbilde schneidet die Mittelhyperbel die durch K gelegten Koordinatenachsen in den

$$\text{Abszissen } \xi_0 = \pm 0 \cdot 0742$$

$$\text{Ordinaten } \eta_0 = \pm 0 \cdot 0698.$$

Im unverkürzten Beobachtungsbilde fällt die imaginäre Hyperbelachse mit dem imaginären konjugierten Durchmesser nach Lage und Größe annähernd

zusammen und steht die reelle Achse annähernd senkrecht zur Schaulinie; denn da das Quadrat von a in Summen oder Differenzen neben dem Quadrat von b verschwindet, so gehen die Formeln 14) und 15) in Anwendung auf die unverkürzte Mittelhyperbel über in

$$\mathfrak{A} = a \sin \varphi, \quad \alpha = \varphi - 90^\circ$$

und es wird

$$\mathfrak{A} = 0.0500 \quad (8.699 \ 1080)$$

$$\mathfrak{B} = 702.279 \quad (2.846 \ 5097)$$

$$\alpha = -10^\circ 23' 36'', \quad \beta = 0.$$

Zu den in der imaginären Hyperbelachse (Schaulinie) gemessenen Abszissen der Dreieckspunkte gehören die Ordinaten:

$$\text{für } P' \text{ mit } \mathfrak{X} = i = 738.20 \text{ m} \dots \mathfrak{Y} = 0.0726 \text{ m}$$

$$\text{für } P'' \text{ mit } \mathfrak{X}'' = j = 668.11 \text{ m} \dots \mathfrak{Y}'' = 0.0690 \text{ m}.$$

Die Mittelhyperbel, für welche die Wahrscheinlichkeit, von der wahren Lage der Dreiecksseite in imaginären Punkten geschnitten zu werden,

$$W_i = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.39347,$$

d. i. rund 39%, und daher in reellen Punkten geschnitten zu werden, 61% beträgt, nähert sich mit ihren Scheiteln dem Kernpunkte K der ausgeglichenen Dreiecksseite bis auf $\mathfrak{A} = 5.00 \text{ cm}$ und schwenkt mit den Aesten bei P' um $\pm 7.26 \text{ cm}$, bei P'' um $\pm 6.90 \text{ cm}$ ab. Das zwischen den Aesten der Mittelhyperbel sich ausbreitende „Streuungsfeld“ (vergl. II. Bd., S. 7), besitzt daher an der engsten Stelle bei K eine Breite von 10.0 cm und verbreitert sich bei

P' auf 14.5 cm , bei P'' auf 13.8 cm . Der Asymptotenwinkel τ aus $\text{tg} \frac{\tau}{2} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$

beträgt im verkürzten Beobachtungsbilde $\tau = 20^\circ 12' 42''$, im unverkürzten Bilde aber bloß $29''$, womit die außerordentliche Flachheit der Fehlerhyperbel in ihrer natürlichen Gestalt gekennzeichnet erscheint.

In jedem Punkte der Dreiecksseite besitzt der mittlere Fehler in der Richtung der Dreiecksseite den beständigen Wert des mittleren Entfernungsfehlers; in der dazu konjugierten Richtung ist er durch die zwischen der Dreiecksseite und der Mittelhyperbel liegende schiefwinkelige Ordinate bestimmt. Der normale Querfehler berechnet sich in ähnlicher Weise wie der konjugierte Querfehler.

Zweigt daher von irgend einem Punkte der Dreiecksseite ein Polygonzug oder eine Messungslinie ab, so können die mittleren Anschlußfehler mit Benützung der Mittelhyperbel leicht ermittelt werden.

Legt man der Konstruktion der Kernellipsen und der Fehlerhyperbel anstatt den mittleren Fehlern die wahrscheinlichen Fehler zu Grunde, so kann man dadurch direkt die wahrscheinlichen Anschlußfehler erhalten. Die hierzu dienende Hyperbel, die zentraler als die Mittelhyperbel liegt, ist aber nicht identisch mit der „wahrscheinlichen Fehlerhyperbel“; denn die verschiedenen charakteristischen Fehlerhyperbeln scharen sich um die Mittelhyperbel in ähnlicher Weise wie die wahrscheinliche, die durchschnittliche und die mittlere Fehlerellipse um die Zentralellipse oder Kernellipse.

Für die wahrscheinliche Fehlerhyperbel beträgt die Wahrscheinlichkeit W_1 , von der wahren Richtung der Dreiecksseite imaginär geschnitten zu werden, 50%. Für die durchschnittliche Fehlerhyperbel beträgt diese Wahrscheinlichkeit 58%, für die mittlere Fehlerhyperbel 68%.

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechungen.

Zur Rezension gelangen nur Bücher, welche der Redaktion der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen zugesendet werden.

Bibliotheks-Nr. 555. Mitteilungen des k. u. k. Militärgeographischen Institutes. Herausgegeben auf Befehl des k. u. k. Kriegsministeriums, XXXIII. Band 1913. Mit 8 Tafeln und 10 Figuren. Wien 1914, Verlag des k. u. k. Militärgeographischen Institutes.

Diese Publikation unseres k. u. k. Militärgeographischen Institutes, welche in der Literatur stets mit Interesse erwartet wird, zerfällt in zwei Teile: der erste offizielle Teil berichtet über die Leistungen des Institutes im Jahre 1913 und der zweite nicht offizielle Teil bringt zwei wertvolle fachliche Arbeiten von Offizieren der Anstalt.

Leider ist es uns aus Raummangel versagt, auf die zahlreichen und verdienstvollen Arbeiten der geodätischen Gruppe, welche in ihrer astronomischen, trigonometrischen, sowie Nivellement- und Kalkulabteilung Bedeutendes geleistet hat, näher einzugehen, ebenso wie wir uns begnügen müssen, auf die Leistungen der Mappierungsgruppe, der kartographischen und der technischen Gruppe, die in den Mitteilungen geschildert werden, nur hinzuweisen.

Die beiden Arbeiten des nichtoffiziellen Teiles: «Die Flutmessungsangaben in Ragusa in den Jahren 1912 und 1913», mitgeteilt vom Leiter der Nivellementsabteilung k. u. k. Major Julius Gregor, sowie «Die Stereoaugmentometrie im Dienste der Landesaufnahme» vom k. u. k. Oberst des Generalstabskorps und Leiter der Mappierungsgruppe Karl Korzer, wobei die letztere mit vorzüglichen Textfiguren und lehrreichen Tafeln versehen ist, werden in Fachkreisen ganz besonders begrüßt werden, bringen sie doch Studien über Fragen von größtem Interesse.

Der vorliegende XXXIII. Band 1913 ist mustergültig ausgestattet und macht unserem k. u. k. Militärgeographischen Institute, das unter der anerkannt bewährten Leitung des k. u. k. Feldzeugmeisters Exzellenz O. Frank steht, alle Ehre. D.

2. Neue Bücher.

Deimler Wilh.: Konforme Abbildung des ganzen Erdsphäroids auf der Kugel. 71 S. m. Fig. u. 2 Taf. in «Abhandlungen der kön. bayr. Akad. d. Wissenschaften». Math. phys. Klasse. XXVII. Bd. München 1914. G. Franz' Verlag. Mk. 3.—.

Finsterwalder S.: Eine neue Lösung der Grundaufgabe der Luftphotogrammetrie. (Aus «Sitzungsber. d. kön. bayr. Akad. d. Wiss.») München 1915, G. Franz' Verlag. Mk. —20.

Pringsheim Alfr.: Ueber eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenspolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie. (Aus «Sitzungsber. d. k. bayr. Akad. d. Wiss.») München 1915, G. Franz' Verlag. Mk. —60