Paper-ID: VGI_191052

Über die Isostasie der Erdkruste

W. Láska [1]

[1] *o. ö. Professor an der k. k. techn. Hochschnle in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (12), S. 388–391

1910

BibTEX:

```
@ARTICLE{Laska_VGI_191052,
Title = {{\"U}ber die Isostasie der Erdkruste},
Author = {L{\'a}ska, W.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {388--391},
Number = {12},
Year = {1910},
Volume = {8}
}
```

Über die Isostasie der Erdkruste.

Von Prof. **Dr. W. Láska** in Lemberg.

In der letzten Zeit sind zwei für die Erdkenntnis hochwichtige Arbeiten, und zwar:

F. R. Helmert: «Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Pratt'schen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten» (Berlin, Sitz. 1909, XLVIII), und

J. Hayford: «The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States.» Washington. Governement printing office 1909

erschienen, welche wir wegen ihrer Wichtigkeit nicht mit Stillschweigen übergehen können.

Das Prinzip der Isostasie läßt sich anschaulich wie folgt darstellen. Nach dem neuesten Stande unseres Wissens über das Erdinnere haben wir uns den Erdkern als einen starren Körper vorzustellen, etwa von der Starrheit des Stahles, auf welchen die geologische Erdkruste so aufruht, als ob sie auf einer Flüssigkeit im hydrostatischen Gleichgewicht schwimmen würde.

Infolgedessen gibt es im Erdinnern eine Niveaufläche, für welche der Druck aller auf ihr aufliegenden Massen auf Flächeneinheit überall derselbe ist. Innerhalb dieser Fläche herrscht das hydrostatische, außerhalb das elastische Gleichgewicht. Diese Niveaufläche soll die Ausgleichsfläche genannt werden.

Aus dieser Anschauung, deren Gültigkeit experimentel auf Veranlassung von Helmert von Hecker auf seinen großen Ozeanreisen und von Hansen für die Breiten 84° und 86° während der «Framreise» (1894—96) auch für die Meere streng erwiesen ist, folgt, daß ein Elementarprisma, welches senkrecht auf dieser Fläche steht, ein gleiches Quantum der gravitierenden Massen enthält.

Für die Geodäsie ist es nun höchst wichtig zu wissen, wie tief diese Ausgleichsfläche gelegen ist. Auf diese Frage geben uns die oben erwähnten zwei Arbeiten eine praktisch übereinstimmende Antwort.

Um aber das Resultat recht würdigen zu können, ist es notwendig, den Weg zu zeigen, auf welchen man zu ihm gekommen ist. Es wird auch gut sein, wenn wir die von Helmert übergangenen Entwicklungen mit Rücksicht auf unseren Leserkreis ausführlich mitteilen.

Zur Ableitung der Gleichung für die Tiefe der Ausgleichsfläche wählen wir eine Küstenstation, weil hiebei der Vorgang ohne weiteres klar wird.

Es sei (Siehe Fig. 1) B ein Punkt in der Entfernung $a\,km$ von der Küste, dessen Meereshöhe wir gleich Null annehmen.

Um die Variation der normalen Schwere g_n infolge der Konfiguration der Umgebung zu berechnen, nehmen wir eine trapezoidale Küste an, welche einer Meerestiefe $t = 4\,km$ unter einem Winkel ν entsteigt, so daß ihre Basis

$$b = a + t \cos \nu$$

wird. Die ganze Erdkruste von der Dicke T denken wir uns über der Ausgleichsfläche im isostatischen Gleichgewicht. Die mittlere Dichte der Erdkruste sei θ,

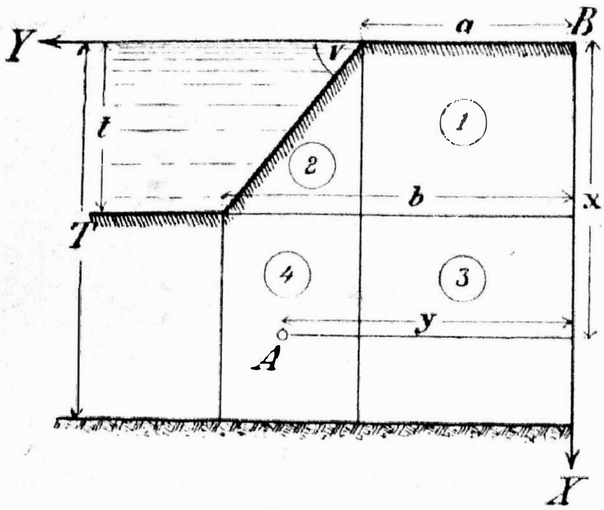

Fig. 1.

jene des Meerwassers 1 (genauer 1·03), dann wird die Dichteverminderung im Profilteile

$$(3) \text{ gleich } (\theta - 1)\,\frac{t}{T - t}$$

und im Profilteile

$$(4) \text{ gleich } (\theta - 1)\,\frac{t - (y - a)\operatorname{tang} v}{T - t}.$$

Sei nun ϑ allgemein die Dichte eines prismatischen Elements A in der Entfernung

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

vom Punkte B (siehe Fig. 2).

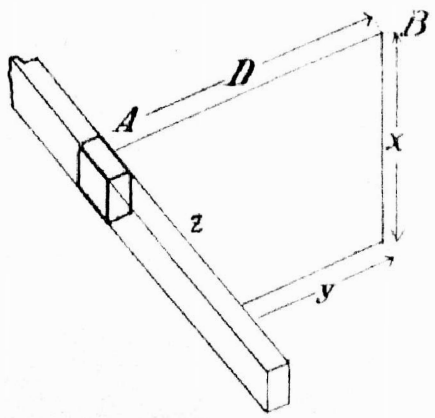

Fig. 2.

Die Potentialfunktion wird in diesem Falle

$$V = 2\varepsilon^2 \int_0^\infty \frac{dm}{D} = 2\varepsilon^2 \vartheta\, dx\, dy \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Bigg/_{z=\infty}$$

also wenn wir der Kürze halber

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

setzen, ausgerechnet:

$$V = 2\varepsilon^2 \vartheta\, dx\, dy \log\left\{\frac{z}{R} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}}\right\}$$

was sich auch schreiben läßt, wie folgt:

$$V = -2\varepsilon^2 \vartheta\, dx\, dy \log R + 2\varepsilon^2 \vartheta\, dx\, dy \log\left(z + \sqrt{R^2 + z^2}\right)$$

so daß

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\varepsilon^2 \vartheta\, dx\, dy \frac{\frac{\partial R}{\partial x}}{R} + \frac{2\varepsilon^2 \vartheta\, dx\, dy \frac{\partial \sqrt{R^2 + z^2}}{\partial x}}{z + \sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Limitieren wir mit $z = \infty$, so ergibt sich schließlich

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = 2\varepsilon^2 \vartheta \frac{x\, dx\, dy}{x^2 + y^2}.$$

Das ist die Vertikalanziehung des Elements A auf den Punkt B.

Dieses Differential ist über den ganzen Querschnitt zu integrieren. Wir haben also symbolisch

$$\delta g_u = \iint\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \iint_{(1)} + \iint_{(2)} + \iint_{(3)} + \iint_{(4)}$$

wodurch wir als Schlußresultat

$$\delta g_u = F(T, a, t, v)$$

erhalten. Das bei dieser Ableitung links und rechts der X-Achse vernachlässigte Profil hat auf die Berechnung von δg_u keinen nennenswerten Einfluß.

Die Form der Funktion F ist zwar verwickelt, aber doch der Berechnung zugänglich, so daß wir, sobald δg_u durch Pendelmessungen oder auf andere Art bestimmt ist, offenbar T bestimmen können, da ja a, t und v topographisch meßbar sind.

Auf diese Weise erhielt Helmert aus 4 Gruppen von Stationen, welche über die ganze Erde verteilt sind, nachstehende Grundlagen der Rechnung:

Gruppe I.	$\delta g = +0{\cdot}051 \pm 0{\cdot}012\ cm$	$a = 27\ km$	tang $v = 1:28$
» II.	$\delta g = +0{\cdot}039 \pm 0{\cdot}012\ cm$	$a = 32\ km$	tang $v = 1:62$
» III.	$\delta g = +0{\cdot}038 \pm 0{\cdot}015\ cm$	$a = 80\ km$	tang $v = 1:55$
» IV.	$\delta g = +0{\cdot}014 \pm 0{\cdot}008\ cm$	$a = 150\ km$	tang $v = 1:50$

und nachstehende Resultate:

Gruppe I.	$T = 110 \pm 37\ km$
II.	$T = 121 \pm 43\ km$
III. und IV.	$T = 122 \pm 40\ km$,

also im Mittel

$$\underline{T = 118 \pm 22\ km.}$$

Dieses stimmt ausgezeichnet mit den Angaben des zweiten Werkes, nach welchen in Amerika die Tiefe der Ausgleichsfläche nicht kleiner als 80 und nicht größer als 160 und im Mittel 113 *km* (nach neuer Bearbeitung 122 *km*) beträgt. Dieses Resultat ist aber dadurch besonders schwerwiegend, als es nicht aus Schwereanomalien, sondern aus Lotablenkungen erhalten wurde.

Welche Bedeutung besitzt die Isostasie für die Geodäsie?

Bekanntlich variieren bei konstanter Länge eines Kurvenelements der Krümmungsradius ϱ und die Breite φ gemäß der Gleichung

$$\delta\varrho \,.\, d\varphi = \varrho \,.\, \delta d\varphi$$

so daß also selbst kleinen Variationen von $d\varphi$, große Variationen des Krümmungsradius entsprechen. Nun sind aber gerade die Lotabweichungen $\delta d\varphi$ das am schwersten zu bestimmende Messungselement. Um sie einigermaßen zu bestimmen, müßten wenigstens genähert die Gravitationsmaßen auch unterhalb der Beobachtungsstation bekannt sein. Die Isostasie enthebt uns, sofern die Ergebnisse einer Gradmessung in Betracht kommen, dieser Sorge. Es ist ohne weiteres klar, daß die Unkenntnis der Tiefe der Ausgleichsfläche auf die Berechnung der Erdgestalt, nach der Art der konstanten Fehler wirken mußte, so daß bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate besondere Vorsicht nötig wurde. Die bessere Übereinstimmung der errechneten Werte war also der nächste Gewinn. Die für den amerikanischen Bogen geltenden Werte sind

$$a = 6378283 \pm 34 \qquad \text{Abplattung } 1 : 297{\cdot}8 \pm 0{\cdot}9$$

also die kleine halbe Achse

$$b = 6356868.$$

Zum Vergleiche führen wir das sogenannte Helmertsche «neuere System» an:

$$a = 6378035 = a_{\text{Bessel}}\left(1 + \frac{1}{10{\cdot}000}\right)$$

$$\text{Abplattung} = 1 : 299{\cdot}15 = \text{Bessel}$$

somit

$$b = 6356717,$$

welches sehr gut der europäischen Gradmessung entspricht und dabei den Vorteil hat, daß die mit Bessels ursprünglichen Werten berechneten Tafeln nach einfach zu berechnenden Korrektionen wieder gebrauchsfähig werden. Zum Schlusse möge noch der zurzeit beste Abplattungswert (Helmert 1907) $1 : 298{\cdot}3 \pm 0{\cdot}7$ angeführt werden, um die schöne Übereinstimmung der neueren Werte zu dokumentieren. Vergl. hiezu: Helmert, Die Größe der Erde (Berlin, Sitz. 1906, XXVIII).

Grenzregelung mittels des Polarplanimeters.

Von Privat- und Honorardozent **Dr. A. Haerpfer** in Prag.

Zur Regelung einer mehrfach gebrochenen Eigentumsgrenze durch Einführung einer geradlinigen Ersatzgrenze bedient man sich entweder des numerischen oder des graphischen Verfahrens, je nachdem der Wert der in Betracht kommenden Grundstücke einen höheren oder geringeren Grad von Genauigkeit in der Durchführung wünschenswert erscheinen läßt. Bei wertvollen Parzellen, gleichgültig ob von gleicher oder ungleicher Bonität, wird man wohl ausschließlich das numerische Verfahren anwenden, weil hier die Berechnung der auszutauschenden Flächen, sowie der Absteckungselemente mit einer Sicherheit erfolgt, die mit der anderen Methode naturgemäß nie erreicht werden kann.

Bei dem numerischen Verfahren mißt man die gebrochene Grenze auf eine Messungslinie auf, die je nach der Bedingung, der die zu bestimmende neue