Paper-ID: VGI_190615

Zwei Diagramme zur Ermittlung kleiner sphärischer Größen und ihrer Logarithmen

Ernst Engel [1]

[1] *Inspektor im Triang.- u. Kalkülbüro und Honorardozent*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (11–12), S. 161–173

1906

BibTeX:


```
@ARTICLE{Engel_VGI_190615,
Title = {Zwei Diagramme zur Ermittlung kleiner sph{\"a}rischer Gr{\"o}{\ss}en
   und ihrer Logarithmen},
Author = {Engel, Ernst},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {161--173},
Number = {11--12},
Year = {1906},
Volume = {4}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III/2 Kegelgasse 29, Parterre, T. 2. — K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 821.175.	Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.	Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 3

Nr. 11—12. Wien, am 1. Juni 1906. IV. Jahrgang.

Zwei Diagramme

zur Ermittlung kleiner sphärischer Größen und ihrer Logarithmen.

Von Ernst Engel, Inspektor im Triang.- und Kalkulbureau und Honorar-Dozent.

A. Theorie und Konstruktion der Diagramme.

Bei der Auflösung sphärischer Dreiecke nach der Additamentenmethode und dem Satze von Legendre, sowie bei der Berechnung rechtwinkelig-sphärischer (Soldner'scher) und konformer (Gauß'scher) Koordinaten und bei Bestimmung der Verzerrungsverhältnisse unter Voraussetzung dieser Koordinaten ergibt sich die Notwendigkeit der Berechnung kleiner sphärischer Größen, welche von der Form $p = \frac{a^2 b}{nr^2}$ und $p' = \frac{ab}{c}$ sind oder in einfachster Weise in diese Formen gebracht werden können.

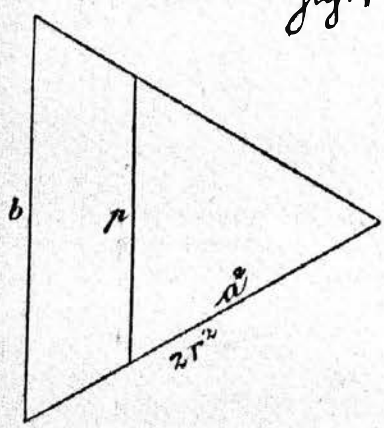
Da die Berechnung dieser Größen in der Praxis zumeist als Massenarbeit auftritt, liegt das Bedürfnis nahe, an Stelle der logarithmischen oder anderartigen Berechnung dieser Werte ihre Bestimmung durch graphische Methoden treten zu lassen, die mit dem Vorzuge der Einfachheit und Raschheit jenen der größten Sicherheit verbinden.

Die Möglichkeit, diese Größen mit der für die Zwecke der Praxis erforderlichen Genauigkeit graphisch zu bestimmen, ist darin gegeben, daß die zu ermittelnden Werte verhältnismäßig kleine Größen darstellen. Die Beschränkung auf diese kleinen Werte ist durch den Umstand gerechtfertigt, daß die Koordinatensysteme für die Darstellung von Teilen der Erdoberfläche für katastrale und verwandte Zwecke aus praktischen Gründen nicht über Ordinaten von 60 bis 70 *km* hinausreichen.

Unter diesen durch die Forderungen der Praxis gegebenen Voraussetzungen sind die im folgenden in ihrer Theorie und Anwendung zu erläuternden Diagramme entworfen.

Der Konstruktion des D i a g r a m m e s I wurde die Gleichung $p = \frac{a^2 b}{2r^2}$ zugrunde gelegt, in welcher der mittlere Krümmungsradius r z u n ä c h s t als eine konstante Größe mit dem Werte für die geographische Breite $\varphi = 45^0$ angenommen wurde. ($\log 2r^2 = 13·910\ 3121$).

Fig. 1



Hiernach ergibt sich $p = \frac{a^2 b}{2r^2}$ durch die in Fig. 1 ersichtlich gemachte Anordnung der in Betracht kommenden Werte p, a^2, b und $2r^2$.

Dividiert man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a^2 b}{2r^2}$ durch $2r^2 = 10^{13·910\,3121} = 10^{9·072\,8547} \times 10^{4·837\,4574}$,

so erhält man $$p = \frac{\dfrac{a^2}{10^{9·072\,85\,47}} \cdot \dfrac{b}{10^{4·837\,45\,74}}}{\dfrac{2r^2}{10^{13·910\,31\,21}}}$$

In dieser Gleichung ist der Nenner des rechten Gliedes $= 1$. Damit $p = 1$ werde, muß $\frac{a^2}{10^{9·072\,85\,47}} = 1$ und ebenso $\frac{b}{10^{4·837\,45\,74}} = 1$ gesetzt werden.

Es ist somit

$$\log a^2 = 9\,072\,85\,47\ (m) \qquad \log b = 4·837\,45\,74\ (m)$$

oder a^2 in km^2 und b in *km* ausgedrückt:

$$\log a^2 = 3·072\,85\,47\ (km) \qquad \log b = 1·837\,45\,74\ (km)$$
$$a^2 = 1182·646\ km^2 \qquad b = 68·779\ km$$
$$a = 34·389\ km.$$

Sohin $\log (1\ km^2) = 6·927\,1453 - 10$ $\log (1\ km) = 8·162\,5426$

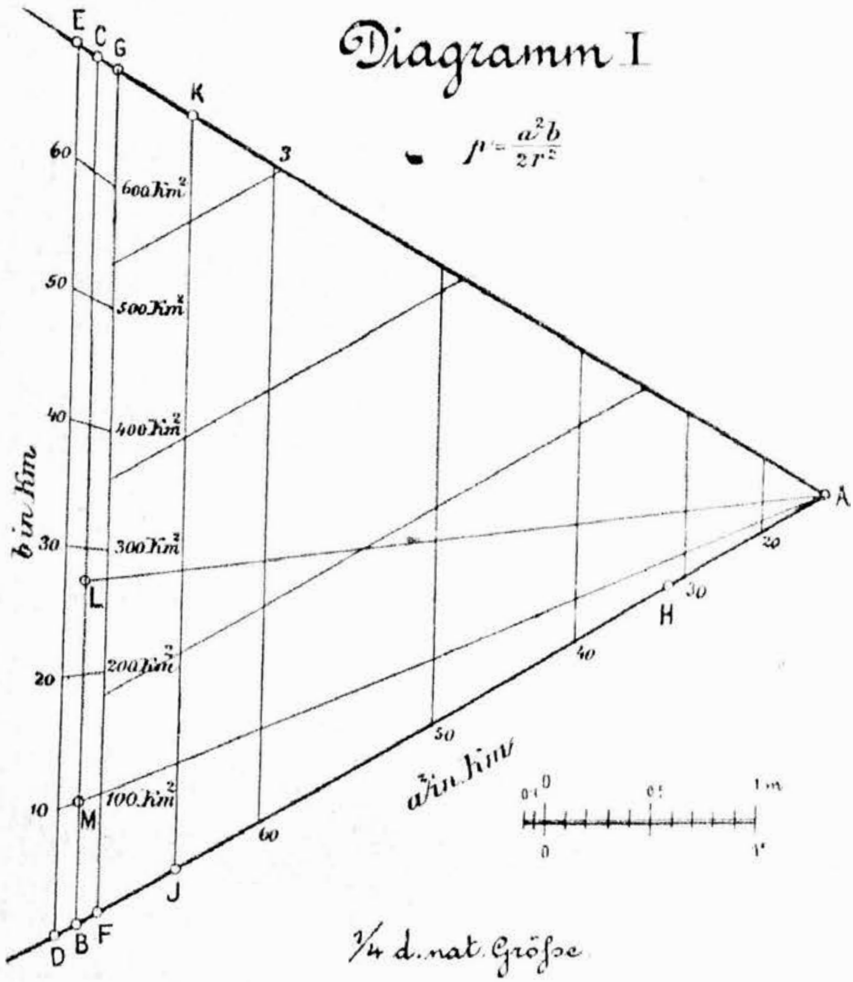
$1\ km = 0·000\,845562$ $\quad 1\ km = 0·0145\,39270$

Für die Konstruktion des Diagramms wurde die Einheit mit einem Dezimeter und $2r^2$ mit vier Dezimetern angenommen. Es sind somit die Werte für b mit 4 zu multiplizieren, so daß $1\ km = 0·058\,15\,70\,80\ dm$.

Es ergibt sich hiernach für das Diagramm I die Form eines gleichseitigen Dreieckes ABC (Fig. 2) mit der Seitenlänge von 4 *dm*, auf dessen Seiten AB und AC die Werte von a^2 im Maße $1\ km^2 = 0·000\,84\,5562\ dm$ und auf dessen Seite BC die Werte von b im Maßverhältnisse $1\ km = 0·05\,815\,70\,80\ dm$ aufzutragen sind.*)

*) Diese Werte sind in der folgenden Tabelle I verzeichnet.

Fig. 2



¼ d. nat. Größe

Der Wert für p ergibt sich sodann als die Länge einer in der Linie AB von A aus gemessenem Abstande a^2 parallel zu BC gezogenen Geraden von ihrem in der Linie AB gelegenen Fußpunkte bis zum Schnittpunkte dieser Geraden mit der Linie, welche den dem Werte b entsprechenden Punkt der Linie BC mit A verbindet.

Da der der Einheit von p entsprechende Wert (1 *m*) im Diagramme gleich 1 *dm* gewählt wurde, kann p dem Diagramme mit v o l l e r Sicherheit bis auf *cm* genau entnommen werden.

In dem Ausdrucke $p = \frac{a^2 b}{2 r^2}$ ist r eine von der geographischen Breite φ abhängige Größe, als deren Wert im Vorstehenden vorläufig jener für $\varphi = 45^0$ angenommen wurde. Der Wert für p wird von dem mit der Breite φ variabeln Werte von $2r^2$ nur sehr wenig beeinflußt, so daß für die Praxis wohl zumeist die Annahme eines Mittelwertes für φ genügt.

Um das Diagramm jedoch für a l l e Werte für φ, resp. r^2 brauchbar zu machen, wurde folgende Einrichtung getroffen.

Da für $\varphi = 0^0$ $\log 2r^2 = 13{\cdot}907\,4086$
für $\varphi = 45^0$ $\log 2r^2 = 13{\cdot}910\,31\,21$ und
für $\varphi = 90^0$ $\log 2r^2 = 13{\cdot}913\,2252$ ist, so kann der Wert für p bei $\varphi = 0$ durch $\frac{a^2 b}{2r^2\ 10^{9\,997\,0965-10}} = \frac{a^2}{2r^2} \cdot 1{\cdot}006708\,b$ und bei $\varphi = 90^0$ durch $\frac{a^2 b}{2r^2\ 10^{0\,0029131}} = \frac{a^2}{2r^2} \cdot 0{\cdot}993\,315\,b$ ausgedrückt werden.

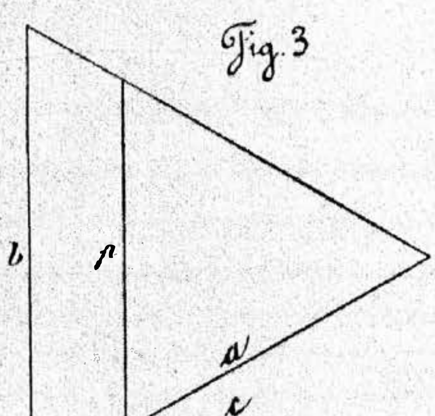
Es sind somit bei $\varphi = 0^0$ die Werte für b mit $1{\cdot}006708$ und bei $\varphi = 90^0$ mit $0{\cdot}99\,3315$ zu multiplizieren. Die in dieser Weise für die Linie BC erhaltenen Werte werden sodann von A aus auf die zur Linie BC parallel gezogenen Geraden (Fig. 2) DE (für $\varphi = 0^0$) und FG (für $\varphi = 90^0$) projeziert. Die Linien DE und FG wurde so gewählt, daß DB = BF = EC = CG = 1 *cm* beträgt.

Unter dieser Annahme werden die für $\varphi = 0^0$ auf der Linie DE aufzutragenden Werte für b durch Multiplikation der für $\varphi = 45^0$ ermittelten mit $1{\cdot}03188$ und jene für $\varphi = 90^0$ auf der Linie FG aufzutragenden Werte für b durch Multiplikation mit $0{\cdot}96\,848$ erhalten. Diese Werte erscheinen in der folgenden Tabelle I ebenfalls nachgewiesen.

Da die denselben Werten von b auf den Geraden DE, BC und FG entsprechenden Strecken mit Rücksicht auf den Maßstab ihrer graphischen Darstellung in dem Diagramme als untereinander proportional angenommen werden können, ergibt sich die Möglichkeit der Berechnung eines für die gesamte Teilung der bezeichneten Strecken gemeinsamen Projektionszentrums H, welches in der Linie AB gelegen ist und dessen Abstand von A sich mit 84·5 *mm* berechnet. Der aus dieser Annahme sich für die Teilung ergebende Maximalfehler erreicht nicht 0·1 *mm* des natürlichen Maßes.

Hiernach kann die Teilung der Strecken DE, BC und FG auf die Teilung einer Linie (am zweckentsprechendsten auf jene von DE) beschränkt werden und die der beiden anderen durch Projezierung dieser Teilpunkte vom Zentrum H graphisch erfolgen.

Die Benützung des Diagrammes für einen beliebigen Wert von φ erfolgt durch Interpollation dieses Wertes von φ in der Verbindungslinie der gleichwertigen b.



Der Konstruktion des Diagrammes II wurde die Gleichung $p' = \frac{a\,b}{c}$ zugrunde gelegt, in welcher $c = \frac{r^2}{\varrho''}$ bedeutet.

Wird vorläufig der mittlere Krümmungsradius mit seinem Werte für die geographische Breite $\varphi = 45^0$ als konstante Größe angenommen, dann ergibt sich $p = \frac{a\,b}{c}$ durch die in Fig. 3 ersichtlich gemachte Anordnung der Größen p, a, b und c.

Unter dieser Voraussetzung ist $\log c = \frac{r^2}{\varsigma''} = 8{\cdot}294\,8569$. Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{ab}{c}$ durch $c = 10^{8\cdot294\,85\,69} = 10^{3\cdot996\,91\,35} \times 10^{4\cdot297\,94\,34}$,

so ist $p = \dfrac{\dfrac{b}{10^{3\cdot996\,91\,35}} \cdot \dfrac{c}{10^{4\cdot297\,94\,34}}}{\dfrac{c}{10^{8\cdot294\,85\,69}}}$ In dieser Gleichung ist der Nenner des rechten Gliedes $= 1$. Damit $p = 1$ werde, ist $\dfrac{b}{10^{3\cdot996\,91\,35}}$ und $\dfrac{a}{10^{4\cdot297\,94\,34}} = 1$ zu setzen.

Es ist somit $\log b = 3{\cdot}996\,91\,35$ (*m*) $\qquad \log a = 4{\cdot}297\,94\,34$ (*m*)

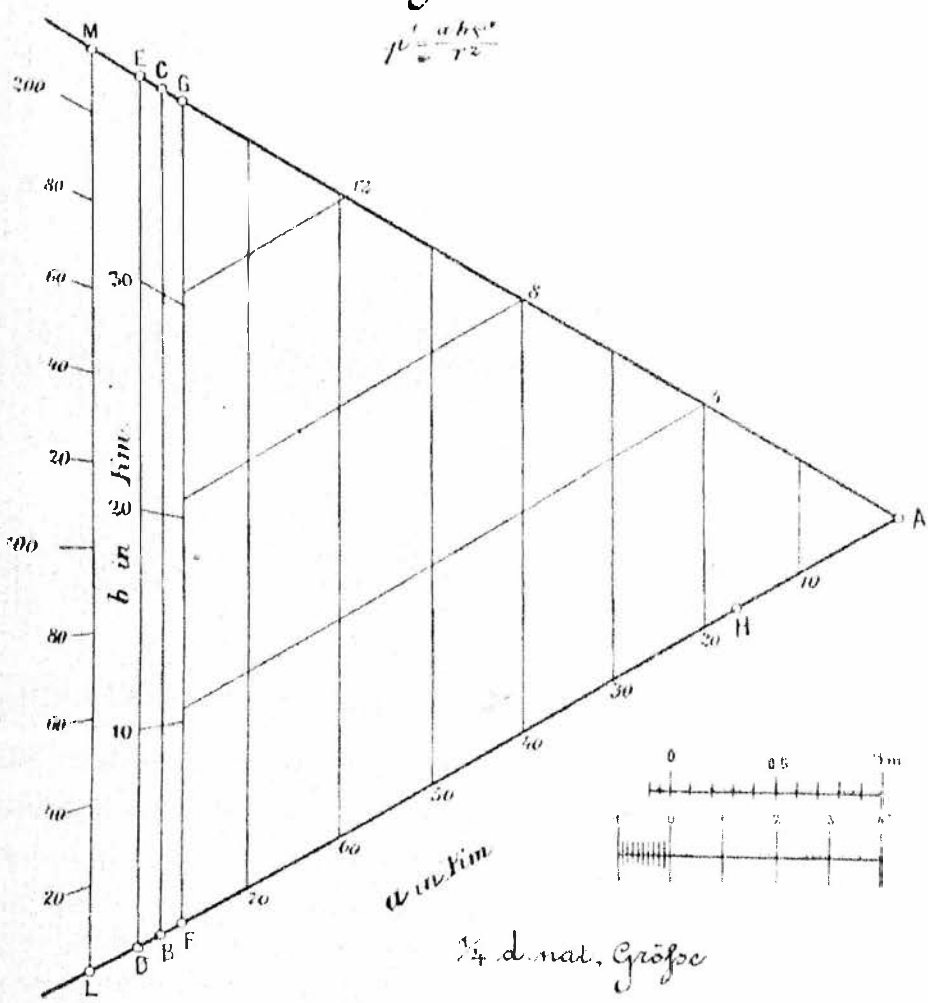
oder b und a in *km* ausgedrückt:

$\log b = 0{\cdot}996\,91\,35$ (*km*) $\quad \log a = 1{\cdot}297\,94\,34$ (*km*)

$b = 9{\cdot}92\,918$ *km* $\qquad a = 19{\cdot}85\,8\,36$ *km*

Fig. 4

Diagramm II



¼ d. nat. Größe

Wird die Einheit des Diagrammes (1″) = ¼ *dm* und für die Skala der b die Linie BC (Fig. 4) angenommen, für welche AB = AC = 4 *dm* ist, so ergibt sich für b 1 *km* = 0·1007133 *dm* und für a 1 *km* = 0·0503566 *dm*.

Die nach obigen Formeln für b und a berechneten Werte erscheinen in der folgenden Tabelle II ausgewiesen.

Um das Diagramm II für sämtliche geographischen Breiten φ, resp. für die diesen entsprechenden mittleren Krümmungsradien r benützbar zu machen, wurde diesfalls die analoge Einrichtung wie bei Diagramm I getroffen.

Die hiefür berechneten Werte erscheinen ebenfalls in Tabelle II nachgewiesen.

Die Einrichtung des Diagrammes II ist in der Fig. 4 schematisch dargestellt.

Außer der Ermittlung der Werte von der Form $\frac{ab}{c}$ gestattet das Diagramm II die Bestimmung der Änderung des Logarithmus für eine Strecke in Einheiten der 7. Dezimalstelle (logarithmisches Additament) bei Änderung der Seite a in a' (a' — a = b = lineares Additament.)

Entsprechend der Konstruktion dieses Diagramms kann jede zur Seite BC des Diagramms Parallele als lineares Additament der zugehörigen Strecke a von der Größe $\frac{0{\cdot}05035662}{1000}$. a aufgefaßt werden.

Es ist somit $a' = a + \frac{0{\cdot}05035662}{1000}\, a = a\left(1 + \frac{0{\cdot}05035662}{1000}\right)$ und

$$\log a' = \log a + \log\left(1 + \frac{0{\cdot}05035662}{1000}\right) \quad \log \text{nat}\left(1 + \frac{0{\cdot}05035662}{1000}\right) = \frac{0{\cdot}05035662}{1000}$$

Sohin $\log\left(1 + \frac{0{\cdot}05035662}{1000}\right)$ in Einheiten der 7. Dezimale $= 10^7\, M\, \frac{0{\cdot}05035662}{1000}$

d. i.

$$\begin{aligned} \log 10^7 &= 7{\cdot}000\,0000 \\ \log M &= 9{\cdot}637\,7843-10 \\ \log 0{\cdot}050\,35662 &= 8{\cdot}702\,0566-10 \\ \hline \Sigma &= 25{\cdot}339\,8409-20 \\ -\log 1000 &= 3{\cdot}000\,0000 \\ \hline \Delta &= 2{\cdot}339\,8409 \end{aligned}$$

und $\log\left(1 + \frac{0{\cdot}05035662}{1000}\right) = 218{\cdot}70$ Einheiten der 7. Dezimale.

Wird die logarithmische Teilung in der Linie LM (siehe Fig. 4) angebracht, für welche AL = AM = 437·4 *mm*, so schreitet diese Teilung um 2 *mm* für eine logarithmische Einheit der 7. Dezimalstelle vor.

Zur Entnahme der Werte für p und p' sind in den Diagrammen I und II zur Linie AB Parallele zu ziehen, deren in der Linie BC gemessenen Abstände für die Einheit im Diagramme I = 1 *dm* im Diagramme II = $^1/_4$ *dm*, resp. 1 *dm* sind. Diese Linien erscheinen in Figur 2 durch die Parallelen 1, 2, 3 und in Figur 4 durch die Parallelen 4, 8, 12 angedeutet.

Außerdem ist für jedes Diagramm ein Maßstab zu entwerfen, dessen Einheit für das Diagramm I = 1 *dm* und für das Diagramm II = $^1/_4$, resp. 1 *dm*.

Das Diagramm II gestattet die Ermittlung der Werte für $p' = \frac{ab\varsigma''}{r^2}$ bis auf circa 0·02 Einheiten, doch unterliegt es keinem Anstande, die Dimensionen desselben und somit seine Genauigkeit zu verdoppeln.

Tabelle I.

a *km*	a^2 *km²*	Teilung in *mm* für die Strecken AB u. AC	DE	BC	FG	b *km*
5	25	2·1	6·0	5·8	5·6	1
10	100	8·5	12·0	11·6	11·3	2
12	144	12·2	18·0	17·5	16·9	3
14	196	16·6	24·0	23·3	22·5	4
16	256	21·6	30·0	29·1	28·2	5
18	324	27·4	36·0	34·9	33·8	6
20	400	33·8	42·0	40·7	39·4	7
22	484	40·9	48·0	46·5	45·1	8
24	576	48·7	54·0	52·3	50·7	9
26	676	57·2	60·0	58·2	56·3	10
28	784	66·3	66·0	64·0	62·0	11
30	900	76·1	72·0	69·8	67·6	12
31	961	81·3	78·0	75·6	73·2	13
H		84·5	84·0	81·4	78·9	14
32	1024	86·6	90·0	87·2	84·5	15
33	1089	92·1	96·0	93·1	90·1	16
34	1156	97·8	102·0	98·9	95·8	17
35	1225	103·6	108·0	104·7	101·4	18
36	1296	109·6	114·0	110·5	107·0	19
37	1369	115·8	120·0	116·3	112·7	20
38	1444	122·1	126·0	122·1	118·3	21
39	1521	128·6	132·0	128·0	123·9	22
40	1600	135·3	138·0	133·8	129·6	23
41	1681	142·1	144·0	139·6	135·2	24
42	1764	149·2	150·0	145·4	140·8	25
43	1849	156·3	156·0	151·2	146·4	26
44	1936	163·7	162·0	157·0	152·1	27
45	2025	171·2	168·0	162·8	157·7	28
			173·7	168·4	163·0	L
46	2116	178·9	174·0	168·7	163·3	29
47	2209	186·8	180·0	174·5	169·0	30
48	2304	194·8	186·0	180·3	174·6	31
49	2401	203·0	192·0	186·1	180·2	32
50	2500	211·4	198·0	191·9	185·9	33
51	2601	219·9	204·0	197·7	191·5	34
52	2704	228·6	210·0	203·6	197·1	35
53	2809	237·5	216·0	209·4	202·8	36
54	2916	246·6	222·0	215·2	208·4	37
55	3025	255·8	228·0	221·0	214·0	38
56	3136	265·2	234·0	226·8	219·7	39
57	3249	274·7	240·0	232·6	225·3	40
58	3364	284·5	246·1	238·4	230·9	41
59	3481	294·3	252·1	244·3	236·6	42
60	3600	304·4	258·1	250·1	242·2	43
61	3721	314·6	264·1	255·9	247·8	44
62	3844	325·0	270·1	261·7	253·5	45
63	3969	335·6	276·1	267·5	259·1	46
64	4096	346·3	282·1	273·3	264·7	47
J, K		348·8	288·1	279·2	270·4	48
65	4225	357·3	294·1	285·0	276·0	49
66	4356	368·3	300·1	290·8	281·6	50
67	4489	379·6	306·1	296·6	287·3	51
F, G		390·0	312·1	302·4	292·9	52
B, C		400·0	318·1	308·2	298·5	53
D, E		410·0	324·1	314·1	304·2	54
			330·1	319·9	309·8	55
			336·1	325·7	315·4	56
			342·1	331·5	321·1	57
			348·1	337·3	326·7	58
			354·1	343·1	332·3	59
			360·1	348·9	337·9	60
			366·1	354·8	343·6	61
			372·1	360·6	349·2	62
			378·1	366·4	354·8	63
			384·1	372·2	360·5	64
			390·1	378·0	366·1	65
			396·1	383·8	371·7	66
			402·1	389·7	377·4	67
			408·1	395·5	383·0	68

Tabelle II.

a in *km*	Teilung in *mm* für die Strecken AB und AC	a in *km*	AB und AC	DE	BC	FG	b in *km*
1	5·0	43	216·5	10·4	10·1	9·8	1
2	10·1	44	221·6	20·8	20·1	19·5	2
3	15·1	45	226·6	31·2	30·2	29·3	3
4	20·1	46	231·6	41·6	40·3	39·0	4
5	25·2	47	236·7	52·0	50·4	48·8	5
6	30·2	48	241·7	62·4	60·4	58·5	6
7	35·3	49	246·7	72·7	70·5	68·3	7
8	40·3	50	251·8	83·1	80·6	78·0	8
9	45·3	51	256·8	93·5	90·6	87·8	9
10	50·4	52	261·9	103·9	100·7	97·5	10
11	55·4	53	266·9	114·3	110·8	107·3	11
12	60·4	54	271·9	124·7	120·9	117·0	12
13	65·5	55	277·0	135·1	130·9	126·8	13
14	70·5	56	282·0	145·5	141·0	136·6	14
15	75·5	57	287·0	155·9	151·1	146·3	15
16	80·6	58	292·1	166·3	161·1	156·1	16
H	84·5	59	297·1	176·7	171·2	165·8	17
17	85·6	60	302·1	187·1	181·3	175·6	18
18	90·6	61	307·2	197·5	191·4	185·3	19
19	95·7	62	312·2	207·8	201·4	195·1	20
20	100·7	63	317·2	218·2	211·5	204·8	21
21	105·7	64	322·3	228·6	221·6	214·6	22
22	110·8	65	327·3	239·0	231·6	224·3	23
23	115·8	66	332·4	249·4	241·7	234·1	24
24	120·9	67	337·4	259·8	251·8	243·8	25
25	125·9	68	342·4	270·2	261·9	253·6	26
26	130·9	69	347·5	280·6	271·9	263·4	27
27	136·0	70	352·5	291·0	282·0	273·1	28
28	141·0	71	357·5	301·4	292·1	282·9	29
29	146·0	72	362·6	311·8	302·1	292·6	30
30	151·1	73	367·6	322·2	312·2	302·4	31
31	156·1	74	372·6	332·6	322·3	312·1	32
32	161·1	75	377·7	342·9	332·4	321·9	33
33	166·2	76	382·7	353·3	342·4	331·6	34
34	171·2	77	387·7	363·7	352·5	341·4	35
35	176·2	F, G	390·0	374·1	362·6	351·1	36
36	181·3	B, C	400·0	384·5	372·6	360·9	37
37	186·3	D, E	410·0	394·9	382·7	370·6	38
38	191·4	L, M	437·4	405·3	392·8	380·4	39
39	196·4						
40	201·4						
41	206·5						
42	211·5						

B. Anwendung des Diagramms.

a) Ermittlung rechtwinkelig-sphärischer Koordinaten aus Polarkoordinaten.

Gegeben: Die rechtwinkelig-sphärischen Koordinaten eines Punktes A x und y, die Länge des Bogens AB = s und sein Richtungswinkel α im Punkte A.

Gesucht: Die rechtwinkelig-sphärischen Koordinaten des Punktes B und der Richtungswinkel β des Bogens BA im Punkte B (resp. die Koordinatenkonvergenz $\alpha - \alpha'$).

Die Lösung dieser Aufgabe in erster Näherung erfolgt bekanntlich nach den folgenden Formeln:

$$y' = y + v - \frac{u^2 y}{2r^2} - \frac{u^2 v}{6r^2} \quad \ldots \ldots \; 1)$$

$$x' = x + u + \frac{uy'^2}{2r^2} - \frac{uv^2}{6r^2} \quad \ldots \ldots \; 2)$$

$$\alpha - \alpha' = u \,.\, \frac{y + y'}{2} \,.\, \frac{\varsigma''}{r^2} \quad \ldots \ldots \; 3)$$

$$\beta = \alpha' \pm 180^0 \,. \quad \ldots \ldots \; 4)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet $v = s \sin \alpha$ und
$u = s \cos \alpha$.

Bei Anwendung des Diagrammes reduziert sich die rechnerische Lösung dieser Aufgabe bezüglich der Gleichungen 1 und 2 auf die Berechnung der rechtwinkelig-ebenen Koordinaten des Punktes B, welchen die dem Diagramme I nach Maßgabe der obigen Formeln zu entnehmenden linearen Additamente hinzuzufügen sind.

Hiebei ist zu beachten, daß die Werte des letzten Gliedes der Gleichungen 1 und 2 dem Diagramme im dreifachen Betrage entnommen werden, somit durch 3 zu dividieren sind.

Die Ermittlung der Ordinatenkonvergenz $\alpha - \alpha'$ (nach Gleichung 3) erfolgt im Diagramme II, indem in dasselbe mit den Argumenten u und $\frac{y + y'}{2}$ eingegangen wird.

b) **Bestimmung der Entfernung und der Richtungswinkel aus den sphärischen Koordinaten zweier Punkte.**

Gegeben: Die rechtwinkelig-sphärischen Koordinaten der Punkte A (x y) und B (x' y').

Gesucht: Der Richtungswinkel α der Seite AB im Punkte A $= \alpha$, jener im Punkte B $= \alpha'$ und die Länge der sphärischen Seite AB $=$ s

$$\text{tang } \alpha = \frac{(y' - y) + dy}{(x' - x) + \delta x} \quad \ldots \ldots \ldots \; 1)$$

$$\alpha - \alpha' = (x' - x) \left(\frac{y + y'}{2}\right) \frac{\varsigma''}{r^2} \quad \ldots \ldots \; 2)$$

$$\beta = \alpha' \pm 180^0 \quad \ldots \ldots \ldots \; 3)$$

$$s = \frac{(y' - y) + \delta y}{\sin \alpha} = \frac{(x' - x) + \delta x}{\cos \alpha} \quad \ldots \; 4)$$

In diesen Formeln ist $\delta y = \,.\, \frac{(x' - x) y^2}{2r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6r^2} \quad \ldots \ldots \; a)$

$$dx = - \frac{(x' - x) y'^2}{2r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6r^2} \quad \ldots \ldots \; b)$$

Auch die Lösung dieser Aufgabe reduziert sich bei Anwendung des Diagramms bezüglich der Gleichangen 1 und 4 auf die rechnerische Bestimmung der gesuchten Größen in der Ebene, wenn den Koordinatendifferenzen die linearen

Additamente, welche gemäß den Formeln a und b dem Diagramme I entnommen werden können, hinzugefügt werden.

Die Ermittlung der Ordinatenkonvergenz $\alpha - \alpha'$ (Gleichung 2) erfolgt analog jener in der vorstehenden Aufgabe mit Benützung des Diagramms II.

c) Die Ermittlung des sphärischen Exzesses.

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\,\varsigma'' = \frac{F(\varsigma'^{1/2})^2}{r^2} = \frac{F(\sqrt{2\varsigma'^{1/4}})^2}{2r^2} =$$

$$\frac{\frac{F}{100^2}\cdot\left(100\sqrt{2\varsigma'^{1/4}}\right)^2}{2r^2} = \frac{b\,a^2}{2r^2}$$

Es ist somit $b = \frac{F}{100^2}$; $a = 100\sqrt{2\varsigma'^{1/4}}$

Für den Wert von 10 *km* auf der Linie BC des Diagrammes I ergibt sich sohin als Wert der äquivalenten Fläche

$$F = 100^2\ b = 100^2\ 10\,km = 10000 \times 10000\,m^2 = 100\,km^2.$$

Es entsprechen also dem Werte von 10 *km* der bezeichneten Linie 100 *km*², wonach die Bezeichnung der Teilung dieser Linie zu erfolgen hat.

Für $a = 100\sqrt{2\varsigma'^{1/4}}$ ergibt sich 64.228·47 *m* oder im Maßstabe des Diagramms I für die Entfernung AJ = AK = 348·8 *mm*.

Es sind somit die Werte für den sphärischen Exzeß dem Diagramme I für jede beliebige Breite φ als Strecken zu entnehmen, deren Anfangspunkt der Punkt J und dessen Endpunkt jener Punkt der Linie JK ist, in welchem die Verbindungsgerade des dem Werte von F entsprechenden Punktes mit A die Linie JK schneidet.

Gemäß der Konstruktion des Diagrammes entspricht 1 Sekunde die Strecke von 1 *dm*, so daß Hundertel der Sekunde noch mit voller Sicherheit gefunden werden.

d) Die Bestimmung des linearen Additaments für die Auflösung sphärischer Dreiecke nach der Additamenten-Methode.

$$A = \frac{s^3}{6r^2} = \frac{1}{3}\,\frac{s^2.s}{2r^2}$$

Die Entnahme dieser Werte erfolgt entsprechend der angedeuteten Zerlegung im Diagramme I, und zwar bis auf Zentimeter genau.

e) Die Ermittlung der Ordinatenkorrektion für Gauß'sche Koordinaten.

$$A' = \frac{\mathfrak{y}^3}{6r^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{y}^2\cdot\mathfrak{y}}{2r^2}$$

erfolgt analog jener ad *d*).

f) **Bestimmung der Entfernung und der Richtungswinkel aus Gauß'schen (konformen) Koordinaten zweier Punkte.**

Gegeben: Die Gauß'schen Koordinaten der Punkte A $(x_1\ y_1)$ und B $(x_2\ y_2)$.

Gesucht: Die Länge des zwischen A und B gelegenen sphärischen Bogens S und die Richtungswinkel desselben im Punkt A (T_1) und B (T_2).

Bezeichnet t_1 das Azimut der geraden Verbindungslinie der gegebenen Punkte im Punkte A und s deren Länge, so ist

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$s = \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{12r^2}(y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_2^2) \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

$$T_1 - t_1 = \delta_1 = \frac{\varsigma''}{6r^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

$$T_2 - t_2 = \delta_2 = \frac{\varsigma''}{6r^2}(x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2) \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

In Gleichung 5) ist $t_2 = t_1 \pm 180^0$.

Bezeichnet man in Gleichung 3) $\log s - \log S$ mit $\triangle \log s$, so ist:

$$\triangle \log s = \frac{\mu}{12r^2}(y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_2^2) \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Damit eine Einheit der 7. Dezimalstelle des Logarithmus in dem Diagramme I, dessen Einheit = 1 *dm* gewählt wurde, durch 1 *mm* dargestellt erscheine, ist $\triangle \log s$ in Einheiten der 5. Dezimalstelle auszudrücken; damit weiters das Diagramm für den Klammerausdruck des rechten Gliedes der Gleichung 6) ausreiche, gehen wir in das Diagramm anstatt mit y_1^2, $(y_1 + y_2)^2$ und y_2^2 mit den Argumenten $\left(\frac{y_1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{y_2}{2}\right)^2$ ein. Unter diesen Voraussetzungen geht Gleichung 6) über in

$$\triangle \log s\, 10^5 = \frac{10^5 \mu\, 2}{3} \cdot \frac{1}{2r^2}\left\{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2}\right)^2\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Drücken wir s in *km* aus, so ist:

$$\triangle \log s\, 10^2 = \frac{10^2 \mu . 2}{3} \cdot \frac{1}{2r^2}\left\{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2}\right)^2\right\} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

In dieser Gleichung ist $\frac{2 \,.\, 10^2 \mu}{3}$ eine konstante Größe = 28·95296 *km*, deren Wert in der Linie BC des Diagrammes I sich mit 168·4 *mm* (Punkt K) ergibt.

Setzen wir in der Gleichung 8) für

$$\triangle \log s\, 10^2 = p, \quad \frac{10^2 \mu . 2}{3} = b \text{ und}$$

$$\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 = a_1^2, \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = a_2^2, \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = a_3^2, \text{ so erhalten wir}$$

$$p = \frac{b}{2r^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Wir erhalten somit p als die Summe dreier Produkte, welche wir dem Diagramme I in der Weise graphisch entnehmen, daß wir für die Argumente y_1^2, $(y_1 + y_2)^2$ und y_2^2 mit dem halben Argumente eingehen und die zugehörigen Werte in der Linie KA ablesen.

Da entsprechend der Konstruktion eine Einheit der 7. Dezimalstelle $= 1\,mm$ ist, wird das Resultat einschließlich dieser Dezimalstelle vollständig sicher erhalten.

Die Ermittlung der Werte für δ_1 und δ_2 in Gleichung 4) und 5) erfolgt im Diagramm II unter Zugrundelegung der folgenden Umformung der bezogenen Gleichungen.

$$\delta_1 = \frac{\varsigma''}{6r^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) = \frac{1}{2}\frac{\varsigma''}{r^2}(x_2 - x_1)\left(\frac{2y_1 + y_2}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\varsigma''}{r^2}a \,.\, b = \frac{1}{2}p'$$

$$\delta_2 = \frac{\varsigma''}{6r^2}(x_1 - x_2)\left(\frac{y_1 + 2y_2}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\varsigma''}{r^2}(x_1 - x_2)\left(\frac{y_1 + 2y_2}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\varsigma''}{r^2} \,.\, a_1 b_1 = \frac{1}{2}p_1'$$

Es ist somit für δ_1 in das Diagramm II mit $a = x_2 - x_1$ und mit $b = \frac{2y_1 + 2y_2}{3}$ und für δ_2 mit $a_1 = (x_1 - x_2) = -(x_2 - x_1)$ und mit $b_1 = \frac{y_1 + 2y_2}{3}$ einzugehen. Die dem Diagramme entnommenen Werte sind unter Beibehaltung der für dieses Diagramm gewählten Einheit $= \frac{1}{4}\,dm$ durch 2 zu dividieren. Hiernach ergeben sich die Werte für δ_1 und δ_2 bis auf 0·01 Grad genau.

g) Ermittlung der maximalen Vergrößerung einer Strecke von der Länge eines *km* in Soldner'scher = der konformen Vergrößerung in Gauß'scher Projektion.

$$m = \frac{y^2 \,.\, 1000}{2r^2} \quad \text{oder}$$

$$10\,m = \frac{10.000\,y^2}{2\,r^2} = \frac{b\,a^2}{2\,r^2}$$

Es ergibt sich somit der zehnfache Wert für *m*, oder mit Rücksicht auf die dem Diagramme I zugrunde gelegte Konstruktion *m* im natürlichen Maße bis auf den Millimeter genau als eine Strecke, deren Fußpunkt dem Argumente y^2 entspricht und dessen zugehöriger Endpunkt in der Verbindungslinie AM gelegen ist. (Fig. 2 AM = dem Werte b für 10 *km*).

h) Die Ermittlung des logarithmischen Additamentes für eine Strecke a bei Änderung ihrer Länge um ± b.

Dieses Additament wird in der Linie LM des Diagrammes II (Fig. 4) in Einheiten der 7. Dezimalstelle (1 Einheit = 2 *mm*) als Projektion (Zentrum in A) einer zur Linie LM parallelen Strecke erhalten, deren Fußpunkt von A um a absteht und deren Länge = b ist. Für die Auftragung der Länge b wurde 1 *m* = 1 *dm* der Zeichnung gewählt.

In analoger Weise erfolgt die Lösung der Aufgabe, wenn das logarithmische Additament gegeben ist und das zugehörige lineare Additament gesucht wird.

Nach den vorstehenden Erläuterungen erstreckt sich die mit Rücksicht auf die geographischen Breiten der Aufnahmsgebiete nicht beschränkte Anwendbarkei der beiden beschriebenen Diagramme auf eine große Anzahl der bei Ausführung von Landesvermessungen vorkommenden Berechnungsarbeiten, welche bei Benützung der Diagramme, ohne an der erforderlichen Schärfe zu leiden, wesentlich vereinfacht werden.

Ich hoffe daher, allen jenen, die aus Beruf oder Neigung jenen Berechnungen obliegen und praktischen Neuerungen nicht unzugänglich sind, in diesen Diagrammen ein willkommenes Behelf geboten zu haben.

Das Pothenot'sche Problem im Raume.

Von Professor **Karl Fuchs** (Preßburg).

1. Graphische Auflösung.

Das Pothenot'sche Problem im Raume liegt vor, wenn an einer dreiseitigen Pyramide die Seiten a b c der Basis A B C und die entsprechenden Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ an der Spitze S gegeben sind. Dieses Problem hat wohl nur in der Photogrammetrie praktische Bedeutung; es wird zum bekannten Pothenot'schen Problem in der Ebene, wenn die Spitze S in der Ebene der Basis liegt.

Wenn wir aus den Angaben die Pyramide vollständig bestimmen wollen, ist es am natürlichsten, zuerst die Längen der in die Endpunkte A B C mündenden Kanten x y z zu berechnen. Die Seitenflächen der Pyramide geben die folgenden Carnot'schen Bestimmungsgleichungen:

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos\gamma = c^2 \quad \ldots\ldots\ 3)$$
$$y^2 + z^2 - 2yz \cos\alpha = a^2 \quad \ldots\ldots\ 1)$$
$$z^2 + x^2 - 2zx \cos\beta = b^2 \quad \ldots\ldots\ 2)$$

Wir wollen x y z als orthogonale Koordinaten ansehen. Dann sind die drei Gleichungen die Gleichungen von drei elliptischen Zylindern, deren Achsen die Koordinatenachsen sind. Diese drei Zylinder geben in den drei Koordinatenebenen $E_1\ E_2\ E_3$ als Spuren die Ellipsen, deren Achsen diagonal liegen, d. h. mit den Koordinatenachsen Winkel von 45° bilden. Es gibt im allgemeinen, den acht Octanten entsprechend, acht Punkte, in denen sich alle drei Zylinder schneiden, und die drei Koordinaten jedes dieser acht Punkte sind eine Auflösung unseres Problems. Uns kümmert nur die Auflösung des ersten Octanten mit durchaus positiven Wurzeln.

Die angenäherte Bestimmung der Schnittpunkte mittelst darstellender Geometrie ist eine so einfache, so elementare Sache, daß sie keiner weiteren Erläuterung bedarf. Die genauere Bestimmung durch Rechnung kann auf folgende Art geschehen.

Wir suchen die Kulminationspunkte der Elipsen 1) und 2). Durch Differentiation finden wir aus Gleichung 1):

$$(y - z \cos\alpha)\, dy + (z - y \cos\alpha)\, dz = 0 \quad \ldots\ 4)$$

und einen analogen Ausdruck finden wir aus Gleichung 2). Daraus ergeben sich für die Kulminationspunkte der beiden Ellipsen die Bedingungen:

$$y = z \cos\alpha \qquad x = z \cos\beta \quad \ldots\ldots\ 5)$$